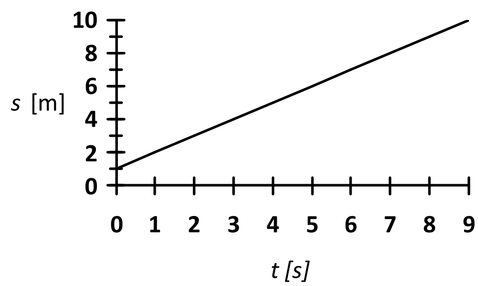
1. MEHANIKA

1.1 Kinematika i dinamika

1.1. Nanoseći na apscisu vreme u [s], a na ordinatu pređeni put u [m], nacrtaj grafik funkcije $s = 1 + t$. Kolika je brzina kretanja? Koliki je početni put?

Rešenje:

$v = 1$ [m/s]; $s_0 = 1$ [m]



1.2. Automobil prelazi prvu trećinu puta brzinom v_1, a ostali deo puta brzinom $v_2 = 50$ [km/h]. Odredi srednju brzinu na prvoj trećini puta, ako je srednja brzina na ukupnom pređenom putu $\overline{v} = 37{,}5$ [km/h].

Rešenje:

Ako je s ukupni put, $s_1 = \frac{1}{3}s$, $s_2 = \frac{2}{3}s$.

Srednja brzina je količnik ukupnog puta i vremena za koji automobil pređe taj put: $\overline{v} = \frac{s}{t}$. Vreme za koje automobil pređe put s je $t = t_1 + t_2$, gde je $\overline{v} = \frac{s}{t}$, a $t_2 = \frac{s_2}{v_2}$.

Prema tome je $\frac{s}{\overline{v}} = \frac{1}{3}\frac{s}{v_1} + \frac{2}{3}\frac{s}{v_2}$. Odavde je,

$$v_1 = \frac{\overline{v} \cdot v_2}{3v_2 - 2\overline{v}} = \frac{37{,}5[\text{km/h}] \cdot 50[\text{km/h}]}{3 \cdot 50[\text{km/h}] - 2 \cdot 37{,}5[\text{km/h}]} = 25 \text{ [km/h]}.$$

1.3. U početnom trenutku telo A se nalazi 60 [km] udaljeno od tačke M i započinje ravnomerno pravolinijsko kretanje ka toj tački, brzinom od 30[km/h]. Telo B se u početnom trenutku nalazi u tački M, iz koje započinje ravnomerno kretanje brzinom od 20 [km/h], po istoj pravolinijskoj putanji kao i telo A, udaljavajući se od njega. Za koje vreme će se oba tela nalaziti jednako udaljena od tačke M i kolika će biti ta udaljenost?

Rešenje:

$s_A = 60$ [km] - 30 [km/h]·t [h], $s_B = 20$[km/h]·t [h];

$s_A = s_B = s, \ t = 1{,}2$ [h].

$s = 20$ [km/h]·1,2 [h] = 24 [km].

1.4. Motociklista je prešao 90 [km] za prva dva časa vožnje. Sledeća tri časa je vozio brzinom od 50 [km/h]. Kolika je srednja brzina na ukupnom pređenom putu?

Rešenje:

$s_1 = 90$ [km], $s_2 = 3$ [h]·50 [km/h] = 150 [km]; $t = t_1 + t_2 = 5$ [h].

$$\overline{v} = \frac{90\ [\text{km}] + 150\ [\text{km}]}{5\ [\text{h}]} = 48\ [\text{km/h}].$$

1.5. Ubrzanje tela je $a = -3$ [m/s^2].

a) Kolika je brzina tela nakon 8 [s], ako je početna brzina 24 [m/s]?

b) Kolika je brzina tela nakon 12 [s] i kakav smisao ima dobijeno rešenje?

Rešenje:

a) $v = v_0 - a{\cdot}t = 24$ [m/s] - 3[m/s^2]·8 [s] = 0 [m/s],

b) $v = v_0 - a{\cdot}t = 24$ [m/s] - 3[m/s^2]·12 [s] = -12 [m/s].

U slučaju a) telo se zaustavlja, a u slučaju b), telo se nakon zaustavljanja kreće u suprotnom smeru, ravnomerno ubrzano i ima trenutnu brzinu 12 [m/s].

1.6. Telo koje slobodno pada iz mirovanja, na kraju prve polovine puta dostigne brzinu $v_1 = 20$ [m/s]. Kolika je brzina tela na kraju padanja? Koliko dugo je telo padalo? Sa kolike je visine palo? (Za ubrzanje sile Zemljine teže uzeti $g \approx 10$ [m/s^2]).

Rešenje:

Pređeni put je jednak:

$s_1 = \frac{h}{2}$, gde je h visina sa koje je telo palo; $v_1 = g{\cdot}t_1$,

$$t_1 = \frac{v_1}{g} = \frac{20[\text{m/s}]}{10[\text{m/s}^2]} = 2\ [\text{s}], \quad s_1 = \frac{gt_1^2}{2} = 20\ [\text{m}],$$

$$h = 40\ [\text{m}],\ v = \sqrt{2gh} = 20\sqrt{2} = 28{,}2\ [\text{m/s}], \quad t = \frac{v}{g} = 2{,}82\ [\text{s}].$$

1.7. Automobil mase 3 tone, ubrza se polazeći iz mirovanja po horizontalnom putu, u toku 10 [s], vučnom silom od 3 [kN]. Zatim se ugasi motor, a automobil nastavi da se kreće. Odredi:

a) Koliko je ubrzanje automobila?

b) Koliku brzinu postiže sa tim ubrzanjem?

v) Na kome rastojanju od početne tačke kretanja se zaustavlja?

Koeficijent trenja je $\mu = 0{,}020$.

Rešenje:

U vertikalnom smeru naniže deluje sila teža, $G = m{\cdot}g$. Sila teža je uravnotežena silom otpora podloge Q. Horizontalno deluje vučna sila F, a suprotno vučnoj sili, deluje sila trenja $F_t = \mu mg$. Rezultanta tih sila je

$$F_R = F - F_t$$

i ta rezultanta daje automobilu ubrzanje a_1:

$$F_R = m{\cdot}a_1.$$

Krećući se ubrzano, automobil pređe put s_1. Na kraju tog puta postigne brzinu

$$v_1 = v_0 + a_1{\cdot}t_1.$$

Kako je $v_0 = 0$, $v_1 = a_1{\cdot}t_1$, srednja brzina na putu s_1 je:

$$\bar{v} = \frac{v_0 + v_1}{2} = \frac{1}{2}v_1 \text{ , pa je prema tome } s_1 = \frac{1}{2}v_1 \cdot t_1.$$

$$a_1 = \frac{F - \mu mg}{m} = \frac{3\cdot10^3[\text{N}]\text{-}2\cdot10^{-2}\cdot3\cdot10^3[\text{kg}]\cdot10[\text{m/s}^2]}{3\cdot10^3[\text{kg}]} = 0{,}8\ [\text{m/s}^2],$$

$$v_1 = 0{,}8\ [\text{m/s}^2]\cdot10\ [\text{s}] = 8\ [\text{m/s}],\ \ \bar{v} = 4\ [\text{m/s}],\ \ s_1 = 40\ [\text{m}].$$

Ukupni pređeni put je $s = s_1 + s_2$. Put s_2 automobil prelazi krećući se usporeno (sa ugašenim motorom), do zaustavljanja: $s_2 = \frac{1}{2}a_2t_2^2$, gde je a_2 usporenje. Konačna brzina

$v_2 = v_1 - a_2{\cdot}t_2 = 0$, odakle je $t_2 = \frac{v_1}{a_2}$. Ako nema vučne sile,

$$F_R = F_t = m{\cdot}a_2 = \mu{\cdot}m{\cdot}g,$$

$$a_2 = \mu{\cdot}g = 0{,}2\ [\text{m/s}^2];$$

$$t_2 = \frac{a_1t_1}{a_2} = \frac{a_1t_1}{\mu g} = \frac{0{,}8[\text{m/s}^2]\cdot10[\text{s}]}{2\cdot10^{-2}\cdot10[\text{m/s}^2]} = 40\ [\text{s}].$$

Put $s_2 = 160$ [m], a $s = 40$ [m] +160 [m] =200 [m].

1.8. Odredi korisnu snagu vodene turbine stepena korisnog dejstva 90%, ako voda u nju ulazi brzinom od 6 [m/s] a izlazi brzinom od 1 [m/s], na nivou koji se nalazi 4 [m] ispod ulaznog nivoa. Protok vode je 20 [m^3/s]. Gustina vode je $\rho = 10^3$ [kg/m^3].
(Za ubrzanje Zemljine teže uzeti g ≈ 10 [m/s^2]).

Rešenje:

Snaga turbine je jednaka promeni energije vode u jedinici vremena: $P = \frac{\Delta E}{\Delta t}$. Korisna snaga je po definiciji $P_\eta = \eta{\cdot}P$, gde je η koeficijent korisnog dejstva. Promena energije jednaka je sumi promene kinetičke energije i promene potencijalne energije vode koja pada:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_u^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 + mgh \,.$$

Ovde je m masa vode, v_u ulazna brzina, v_i izlazna brzina, a h razlika visina ulaznog i izlaznog nivoa. Veza između mase m, gustine ρ i zapremine V, data je izrazom:

$$m = \rho \cdot V.$$

Promena energije može da se napiše kao:

$$\Delta E = \frac{1}{2}\rho V v_u^2 - \frac{1}{2}\rho V v_i^2 + \rho V g h = \frac{1}{2}\rho V \left(v_u^2 - v_i^2 + 2gh\right),$$

a snaga je tada jednaka: $P = \frac{1}{2}\rho V_t (v_u^2 - v_i^2 + 2gh)$,

gde je $V_t = \frac{V}{\Delta t}$ *protok*.

$$P = \frac{1}{2} 10^3[\text{kg/m}^3] \cdot 20[\text{m}]^3 \cdot (36[\text{m/s}]^2 - 1[\text{m/s}]^2 + 2 \cdot 10[\text{m/s}^2] \cdot 4[\text{m}])$$

$$P = 1{,}15\ [\text{MW}].$$

Budući da je $\eta = 0{,}9$, (90%), $P_\eta = 0{,}9\,P = 1{,}035$ [MW].

1.9. Telo mase 2 [kg] pada iz mirovanja sa visine od 20 [m] i u trenutku udara o tlo, ima brzinu od 15 [m/s]. Koliki je rad sile otpora vazduha?

Rešenje:

Rad tela koje pada sa visine h jednak je promeni potencijalne energije:

$$A = mgh = 2\ [\text{kg}] \cdot 10\ [\text{ms}^{-2}] \cdot 20\ [\text{m}] = 400\ [\text{J}].$$

Promena potencijalne energije bila bi jednaka promeni kinetičke energije tela koje pada, kada ne bi bilo otpora vazduha. Deo kinetičke energije troši se na savladavanje sile otpora vazduha. Promena kinetičke energije je:

$$\Delta E = \frac{1}{2} m v_k^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v_k^2 = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 225 = 225\ [\text{J}],$$

jer je početna brzina $v_0 = 0$ [m/s], a konačna brzina $v_k = 15$ [m/s].

Razlika $A - \Delta E = 400$ [J] - 225 [J] = 175 [J], predstavlja rad sile otpora vazduha.

1.10. Kolika je ugaona i linijska brzina tačaka na površini Zemlje

a) na ekvatoru,

b) na geografskoj širini 45^0.

Poluprečnik Zamlje je $R \approx 6{,}4 \cdot 10^6$ [m].

Rešenje:

Period rotacije Zemlje je $T = 24$ [h] ili $T = 86400$ [s].

Ugaona brzina je:

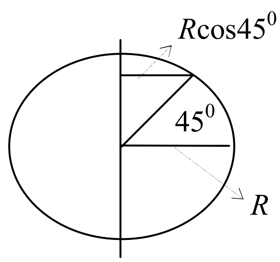
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{6,28[\text{rad}]}{86400[\text{s}]} = 7,26 \cdot 10^{-5} \ [\text{rad/s}]$$

i ista je za sve tačke na površini Zemlje.
Linijska brzina za tačke na ekvatoru je:

$$v_E = R \cdot \omega = 6,4 \cdot 10^6 \,[\text{m}] \cdot 7,26 \cdot 10^{-5} \,[\text{rad/s}] = 464,6 \,[\text{m/s}],$$

a za tačke na geografskoj širini 45^0,

$$v_{45} = R \cdot \cos 45^0 \cdot \omega = 328,5 \,[\text{m/s}].$$



1.2 Mehanika elastičnih deformacija, oscilacija i talasa

1.11. Pod dejstvom sile od 100 [N], žica dužine 5 [m] i površine poprečnog preseka 2,5 [mm^2], istegne se za 1 [mm]. Odrediti normalni napon koji trpi žica i Jungov moduo elastičnosti.

Rešenje:

Normalni napon jednak je sili F koja deluje na jedinicu površine S:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{100[\text{N}]}{2,5 \cdot 10^{-6}[\text{m}^2]} = 4 \cdot 10^7 [\text{Pa}].$$

Relativno izduženje žice je proporcionalno normalnom naponu: $\frac{\Delta \ell}{\ell} = \frac{1}{E_y}\frac{F}{S}$. Ovde je $\Delta \ell$ apsolutno izduženje žice, ℓ je dužina žice, a E_y, Jungov moduo elastičnosti. Prema tome,

$$E_y = \frac{F}{S} \cdot \frac{\ell}{\Delta \ell} = 4 \cdot 10^7 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right] \cdot \frac{5}{10^{-3}} = 2 \cdot 10^{11} \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$$

1.12. Koliki je odnos relativnih izduženja dveju žica od istog materijala pri jednakom opterećenju, ako su dužina i prečnik poprečnog preseka jedne od njih, dva puta veći nego druge. Koliki je odnos njihovih apsolutnih izduženja? Smatra se da je težina žica zanemarljiva u odnosu na opterećenje.

Rešenje:

Relativno izduženje deblje žice je:

$$\frac{\Delta\ell_1}{\ell_1}=\frac{1}{E_y}\frac{F}{S_1} \text{ , gde je } S_1=\left(\frac{2d}{2}\right)^2\pi \text{ .}$$

Relativno izduženje tanje žice je:

$$\frac{\Delta\ell}{\ell}=\frac{1}{E_y}\frac{F}{S_2} \text{ , gde je } S_1=\left(\frac{2d}{2}\right)^2\pi \text{ .}$$

Sa d je označen prečnik preseka tanje žice.

$$\frac{\Delta l_1}{l_1}:\frac{\Delta l_2}{l_2}=\frac{1}{S_1}:\frac{1}{S_2}=\frac{1}{4}.$$

Prema tome, $\frac{\Delta\ell_2}{\ell_2}=4\frac{\Delta\ell_1}{\ell_1}$, $\frac{\Delta\ell_2}{\Delta\ell_1}=4\frac{\ell_2}{2\ell_2}=2$.

1.13. Kolika treba da je površina poprečnog preseka bakarne šipke dužine 5 [m], da se pri opterećenju od 480 [N] ne bi izdužila više od 1 [mm]. Da li šipka može da izdrži toliko opterećenje, ako je granica kidanja za bakar pri normalnom naponu σ = 2,2·10^8 [N/m^2], a Jungov moduo elastičnosti E_y = 1,2·10^{11} [N/m^2]? (Težina šipke ne uzima se u obzir.)

Rešenje:

Zahteva se da bude $\Delta\ell \le 10^{-3}$ [m], $\frac{\Delta\ell}{\ell}\le\frac{10^{-3}}{5}=2\cdot10^{-4}$. Relativno izduženje dato je izrazom:

$$\frac{\Delta\ell}{\ell}=\frac{1}{E_y}\frac{F}{S}$$

prema tome treba da bude $\frac{1}{E_y}\frac{F}{S}\le 2\cdot10^{-4}$,

Dakle potrebno je da površina poprečnog preseka šipke bude:

$$S\ge\frac{F}{2\cdot10^{-4}E_y}=\frac{480[\text{N}]}{2\cdot10^{-4}\cdot1{,}2\cdot10^{11}[\text{N/m}^2]}=2\cdot10^{-5}[\text{m}^2]$$

$$\sigma=\frac{F}{S}=\frac{480[\text{N}]}{2\cdot10^{-5}[\text{m}^2]}=2{,}4\cdot10^{7}[\text{N/m}^2],$$

što je manje od normalnog napona granice kidanja za bakar.

1.14. Kolika treba da bude sila opterećenja, da bi se opruga produžila elastičnom deformacijom za 4 [cm]. Krutost opruge je k = 1000 [N/m]. Kolika je potencijalna energija opruge pri ovakvoj elastičnoj deformaciji?

Rešenje:

Sila koja vraća oprugu u stanje ravnoteže, (restituciona sila), je: $F = -k\cdot\Delta s$, gde je Δs produženje opruge, a k krutost opruge; predznak (-) pokazuje da sila deluje suprotno smeru produženja opruge. Po iznosu, ova sila je jednaka sili opterećenja. Potrebna je sila opterećenja

$$F = 1000\ [\text{N/m}]\cdot 0{,}04\ [\text{m}] = 40\ [\text{N}].$$

Potencijalna energija je:

$$E_p = \frac{1}{2}k\Delta s^2 = \frac{1}{2}1000[\text{N/m}]\cdot(4\cdot 10^{-2})^2[\text{m}^2] = 0{,}8[\text{J}].$$

1.15. Teg mase m = 0,20 [kg], obešen o oprugu, izvrši 30 oscilacija u minuti, sa amplitudom A = 0,10 [m]. Odrediti krutost opruge i kinetičku energiju tega u trenutku T/6 od prolaska kroz položaj ravnoteže.

Rešenje:

Period oscilovanja tega je:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\ ,$$

gde je m masa tega, a k - krutost opruge. Učestanost oscilovanja je jednaka:

$$\nu = \frac{30\ \text{oscilacija}}{60[\text{s}]} = \frac{1}{2}[\text{Hz}].$$

Period je $T = \frac{1}{\nu} = 2[\text{s}]$, pa je krutost opruge:

$$k = \frac{4\pi^2\cdot m}{T^2} = \pi^2\cdot m = 1{,}97[\text{N/m}].$$

Ugaona brzina (ili "kružna" učestanost) je jednaka:

$$\omega = 2\pi\nu = 2\pi\frac{1}{T} = 2\pi[\text{rad}]\frac{1}{2[\text{s}]} = \pi[\frac{\text{rad}}{\text{s}}].$$

U trenutku $t = T/6$, od prolaska tega kroz položaj ravnoteže, faza je:

$$\varphi = \omega\cdot \text{t} = \omega\cdot\frac{\text{T}}{6} = \pi\frac{[\text{rad}]}{[\text{s}]}\frac{2[\text{s}]}{6} = \frac{\pi}{3}[\text{rad}],$$

a brzina oscilovanja,

$$v = A\omega\cos(\omega t) = 0{,}1[\text{m}]\pi[\text{rad/s}]\cos 60^0 = 0{,}157[\text{m/s}].$$

Kinetička energija u datom trenutku je $E_k = \frac{1}{2}mv^2 = 2{,}46\cdot 10^{-3}[\text{J}]$.

1.16. Matematičko klatno dužine 99,5 [cm], izvrši 30 punih oscilacija u minuti. Odrediti period oscilovanja klatna i ubrzanje slobodnog padanja na mestu na kome se nalazi klatno.

Rešenje:

Učestanost oscilovanja klatna je

$$\nu = \frac{30\text{oscilacija}}{60[\text{s}]} = \frac{1}{2}[\text{Hz}],$$

pa je period $T = \frac{1}{\nu} = 2[\mathrm{s}]$.

Period oscilovanja matematičkog klatna je dat izrazom

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \ ,$$

gde je l dužina klatna, a g ubrzanje slobodnog padanja. Prema tome je

$$g = \frac{4\pi^2 \cdot \ell}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,995[\mathrm{m}]}{4[\mathrm{s}^2]} = 9,81\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$$

1.17. Odrediti talasnu dužinu talasa učestanosti 200 [Hz], ako je brzina prostiranja talasa 340 [m/s]. Odrediti brzinu zvuka u vodi, ako izvor osciluje sa periodom 0,0020 [s] i pobuđuje u vodi talase, talasne dužine 2,9 [m].

Rešenje:

Talasna dužina data je izrazom: $\lambda = \frac{v}{\nu}$, gde je v brzina prostiranja talasa, a ν učestanost oscilovanja izvora talasa. Prema tome:

$$\lambda = \frac{\mathrm{v}}{\nu} = \frac{340[\mathrm{m/s}]}{200[\mathrm{s}^{-1}]} = 1,7[\mathrm{m}] \ .$$

U vodi je $\lambda = \frac{v_h}{\nu}$, gde je v_h brzina prostiranja zvuka u vodi, a T=1/ν period oscilovanja.

Brzina prostiranja zvuka u vodi je:

$$v_h = \frac{\lambda}{T} = \frac{2,9[\mathrm{m}]}{0,0020[\mathrm{s}]} = 1450[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}] .$$

1.18. Odredi rastojanje između najbližih tačaka progresivnog talasa koje leže na istom pravcu i osciluju u fazi, ako je brzina prostiranja talasa 5000 [m/s], a učestanost 100 [Hz].

Rešenje:

Traženo rastojanje je po definiciji talasna dužina:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{5000[\mathrm{m/s}]}{100[\mathrm{s}^{-1}]} = 50[\mathrm{m}] .$$

1.19. Brzina zvuka u vazduhu može da se odredi po formuli $v = 332\sqrt{1+\alpha t}$ [m/s], gde je α = 1/273 $[^0\mathrm{C}]^{-1}$, a t je temperatura vazduha izražena u Celzijusovim stepenima. Naći brzinu zvuka u vazduhu na temperaturama 0 [^{0}C], 15 [^{0}C] i 20 [^{0}C].

Rešenje:

v_0 = 332 [m/s], v_{15} = 341 [m/s] i v_{20} = 343,9 [m/s]

1.20. Naći sopstvenu frekvenciju oscilovanja čelične strune, dužine $\ell = 0{,}5$ [m] i dijametra poprečnog preseka $d = 1$ [mm], ako je intenzitet sile zatezanja strune $F = 2{,}5$ [N]. Gustina čelika je $\rho = 7800$ [kgm^{-3}].

Rešenje:

Delovanjem sile zatezanja formira se stojeći talas čija je najveća moguća talasna dužina $\lambda_0 = 2\ \ell$, a odgovarajuća sopstvena frekvencija $\nu_0 = c/\lambda_0$, gde je c brzina prostiranja talasa strunom. Spektar frekvencija sopstvenog oscilovanja je $\nu=\nu_0 \cdot n$, gde je n ceo broj. Brzina prostiranja talasa kroz strunu data je izrazom:

$$c = \sqrt{\frac{F}{\mu}}\,,$$

gde je F sila zatezanja strune, a $\mu = m/\ell$ je "podužna masa". Brzina talasa je:

$$c = \sqrt{\frac{Fl}{\rho V}} = \sqrt{\frac{4Fl}{\rho l d^2 \pi}} = \frac{2}{d}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}\,.$$

Prema tome, sopstvena frekvencija je jednaka:

$$\nu_0 = \frac{1}{\ell d}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}} = 20{,}2 \text{ [Hz]}.$$

1.3 Mehanika fluida

1.21. Za koliko treba da se poveća visina u odnosu na nivo morske površine, da bi se atmosferski pritisak promenio za 1 [torr]? Za koliko se promeni atmosferski pritisak ako se visina poveća za 100 [m] u odnosu na nivo morske površine? Temperatura vazduha je 0[^{0}C], gustina vazduha na 0[^{0}C] je $\rho_a = 1{,}29$ [kg/m^3], a gustina žive $\rho_{Hg} = 13595$ [kg/m^3]. Predpostavlja se da je promena temperature kao i promena gustine vazduha zanemarljiva u posmatranom opsegu visina.

Rešenje:

Promena pritiska od 1 [torr], očitava se na barometru pri temperaturi 0[^{0}C] kao promena visine stuba žive od 1 [mm]. Hidrostatički pritisak fluida je jednak: $p = \rho g h$, gde je ρ gustina fluida, g ubrzanje sile teže na datoj lokaciji, a h visina stuba fluida koji vrši pritisak. Promena pritiska Δp koja odgovara promeni stuba žive za $\Delta h = 1$ [mm] je jednaka:

$$\Delta p = \rho_{\mathrm{Hg}} \cdot g \cdot \Delta h = 13595 \text{ [kg/m}^3] \cdot 9{,}81 \text{ [m/s}^2] \cdot 0{,}001 \text{ [m]} = 133{,}37 \text{ [Pa]}.$$

Atmosferski pritisak na visini H iznad površine Zemlje (ukoliko je gustina vazduha do te visine konstantna) dat je izrazom: $p = p_0 + \rho_a\, g {\cdot} H\, \cdot$, gde je p_0 normalni atmosferski pritisak na nivou morske površine. Visina H na kojoj dolazi do promene pritiska

$$p_0 - p = \Delta p,$$

je jednaka:

$$H = \frac{p_0 - p}{\rho_a g} = \frac{\Delta p}{\rho_a g} = \frac{133{,}37[\mathrm{Pa}]}{1{,}29[\mathrm{kg/m^3}]\cdot 9{,}81[\mathrm{m/s^2}]} = 10{,}5\ [\mathrm{m}].$$

Na osnovu gornje relacije za visinu H_1 = 100 [m], vredi:

$$p_0 - p = H_1\rho_a g = 100\ [\mathrm{m}]\cdot 1{,}29\ [\mathrm{kg/m^3}]\cdot 9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] = 1265{,}5\ [\mathrm{Pa}].$$

1.22. Koliki bi bio atmosferski pritisak na visini H = 8000 [m], ako se temperatura vazduha ne bi menjala od nivoa površine mora do te visine?

Rešenje:

Zbog promene gustine vazduha sa visinom, atmosferski pritisak se menja po *barometarskoj formuli*:

$$p = p_0 \cdot e^{-\frac{H}{8000}},$$

gde je p_0 = 1,013·10^5 [Pa], normalni atmosferski pritisak, H, visina izražena u metrima, a e = 2,718, baza prirodnog logaritma. Za H = 8000 [m], barometarska formula može da se napiše u obliku:

$$p = \frac{p_0}{e} = \frac{1{,}013\cdot 10^5[\mathrm{Pa}]}{2{,}718},\ \text{odakle je } p \approx 0{,}373\cdot 10^5\ [\mathrm{Pa}].$$

1.23. Ako se na klip veće površine hidraulične prese stavi teret mase od 1 tone koliki teret treba da se stavi na klip manje površine, da bi presa bila u ravnoteži? Poluprečnik veće površine je r_1 = 28 [cm], a manje površine r_2 = 2 [cm].

Rešenje:

Prema Paskalovom zakonu, pritisak se kroz tečnost prenosi podjednako u svim pravcima.

Pritisak sile teže $p_1 = G_1/S_1$, na površinu $S_1 = r_1^2\pi$, jednak je pritisku $p_2 = G_2/S_2$ na površinu $S_2 = r_2^2\pi$. Izjednačavanjem pritisaka dobija se:

$$\frac{G_1}{S_1} = \frac{G_2}{S_2}.$$

Budući da je $G = mg$, masa kojom se presa dovodi u ravnotežu je:

$$m_2 = \frac{r_2^2\pi}{r_1^2\pi}m_1 = (\frac{2}{28})^2 1000[\mathrm{kg}] = 5{,}1\ [\mathrm{kg}].$$

1.24. Kolika je težina vode koja deluje na batiskaf na dubini d = 100 [m]? Površina horizontalnog preseka trupa batiskafa je S = 80 [m^2]. Gustina morske vode je ρ= 1025 [kg/m^3] ?

Rešenje:

Zapremina mase vode iznad batiskafa je:

$$V = Sd = 80\ [\mathrm{m}^2]\cdot 100\ [\mathrm{m}] = 8000\ [\mathrm{m}^3],$$

pa je težina te mase morske vode:

$$G = \rho V g = 1025\ [\mathrm{kg/m}^3]\cdot 8000\ [\mathrm{m}^3]\cdot 9{,}81\ [\mathrm{m/s}^2] = 80{,}44\cdot 10^6\ [\mathrm{N}].$$

1.25. Dva cilindrična suda, jednakih površina baze, napunjena su vodom, jedan do visine h_1 = 25 [cm], a drugi do visine h_2 = 45 [cm]. Poluprečnik baze je jednak 10 [cm]. Ako se sudovi spoje, nivoi vode u njima se izjednače. Koliki rad izvrši sila teža pri izjednačavanju nivoa vode?

Rešenje:

Izjednačavanjem nivoa, visina vode u svakom od sudova se promeni za:

$$\Delta h = \frac{h_2 - h_1}{2}\ .$$

U sudu koji je bio napunjen do visine h_2, masa vode se spusti pod dejstvom sile teže za Δh. Rad koji izvrši sila teža je jednak:

$$\Delta A = G\Delta h\,,$$

gde je G sila teža. Pomoću gustine ρ i zapremine V, masa vode može da se izrazi kao $m = \rho V$. Sila teža, (težina vode mase m), je jednaka: $G = \rho V g$, gde je ρ = 1000 [kg/m^3] gustina vode, a g = 9,81 [m/s^2], ubrzanje sile teže. Zapremina vode mase m jednaka je

$$V = S\Delta h = S\frac{h_2 - h_1}{2}\text{, a rad sile teže je: } \Delta A = \rho g S\frac{(h_2 - h_1)^2}{4}\,.$$

Uvrštavanjem zadatih vrednosti dobija se

$$\Delta A = 10^3[\mathrm{kg/m}^3]\cdot 9{,}81[\mathrm{m/s}^2]\cdot (0{,}10)^2[\mathrm{m}]^2\pi\cdot (0{,}20)^2[\mathrm{m}^2]\cdot 0{,}25 = 3{,}08\ \ [\mathrm{J}].$$

1.26. Sferni balon čiji je poluprečnik R = 9 [m], napunjen je helijumom. Korpa i konopci za vezivanje korpe, imaju ukupno masu m = 150 [kg]. Kolika je najveća masa tereta koji može da ponese balon? Gustina helijuma je ρ_{He}= 0,16 [kg/m^3], a vazduha ρ_{a} = 1,25 [kg/m^3].

Rešenja:

Sila potiska F_{p} koja podiže balon jednaka je težini balonom istisnutog vazduha G_{a}. (Pri tome se zanemaruje težina vazduha istisnutog pomoćnom opremom i teretom). Sila potiska treba da bude veća od ukupne težine koju čine: težina helijuma $m_{He}\cdot g$, težina korpe i konopaca m·g i težina tereta $M\cdot g$.

$$F_p \geq (m_{He} + m + M)g,$$

gde je m_{He} masa helijuma, m je masa korpe i konopaca, M je masa tereta, a g = 9,81 [m/s^2], ubrzanje sile teže. Najveća masa tereta koju može da ponese balon je:

$$M = \frac{F_p - (m_{He} + m)g}{g}$$

Zapremina balona je jednaka:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 9^3 [\mathrm{m}^3] = 3052\ [\mathrm{m}^3].$$

Težina balonom istisnutog vazduha jednaka je:

$$m_a g = \rho_a V g = 1{,}25\ [\mathrm{kg/m^3}] \cdot 3052\ [\mathrm{m^3}] \cdot 9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] = 37425\ [\mathrm{N}],$$

što je i iznos sile potiska, F_p. Težina helijuma u balonu je:

$$m_{He} g = \rho_{He} V g = 0{,}16\ [\mathrm{kg/m^3}] \cdot 3052\ [\mathrm{m^3}] \cdot 9{,}81\ [\mathrm{m/s^2}] = 4790\ [\mathrm{N}].$$

Za masu tereta se dobija:

$$M = \frac{37425[\mathrm{N}] - (4790 + 150[\mathrm{kg}] \cdot 9{,}81[\mathrm{m/s^2}])}{9{,}81[\mathrm{m/s^2}]} = 3177\ [\mathrm{kg}].$$

1.27. Ako je gustina morske vode ρ_h = 1025 [kg/m^3], a gustina leda ρ = 917 [kg/m^3], koliki se deo od ledene gromade nalazi iznad površine vode?

Rešenje:

Budući da gromada pliva, sila potiska je jednaka težini gromade,

$$F_p = \rho V g,$$

gde je ρ gustina leda, V zapremina gromade, g = 9,81 [m/s^2] ubrzanje sile teže. Zapremina dela gromade koji je ispod vode i zapremina istisnute vode je jednaka V - V_0, gde je V_0 zapremina dela gromade iznad vode. S druge strane, sila potiska je jednaka težini gromadom istisnute vode:

$$F_p = \rho_h (V - V_0) g.$$

$$\rho V g = \rho_h (V - V_0) g, \text{ odakle je}$$

$$\frac{V_0}{V} = 1 - \frac{917[\mathrm{kg/m^3}]}{1025[\mathrm{kg/m^3}]} = 0{,}105\ ,$$

dakle, 10,5% ledene gromade je iznad vode.

1.28. Dijametar otvora kapilarne cevi je 0,20 [mm]. Izračunati koliko se podigne nivo vode, a koliko se spusti nivo žive u njoj, na sobnoj temperaturi? Koeficijent površinskog napona vode je γ_{H_2O} = 0,072 [N/m], a žive γ_{Hg} = 0,470 [N/m]. Za gustinu vode uzeti ρ_{H_2O} = 1000 [kg/m^3], a žive ρ_{Hg} = 13600 [kg/m^3].

Rešenje:

Voda potpuno kvasi staklene zidove suda (ugao kvašenja je α=0^0), a živa ne kvasi staklene zidove suda (ugao kvašenja je α=180^0). Sila površinskog napona jednaka je: $F_p = \gamma \cdot l$, gde je l dužina linije koja razdvaja slobodnu površinu tečnosti od zida suda. Za sud kružnog otvora dijametra d, $l = d \cdot \pi$. Prema tome, $F_p = \gamma \cdot d \cdot \pi$. U ravnoteži, vertikalna komponenta sile površinskog napona $F_v = F_p \cos\alpha$, jednaka je težini stuba vode u kapilari: $F_v = G$, ili $F_p \cos\alpha = mg$. Masa stuba tečnosti je:

$$m = \rho \cdot V = \rho \cdot S \cdot h \cdot g,$$

gde je V zapremina stuba tečnosti visine h u kapilari, a S površina poprečnog preseka kapilare. Dakle: $\gamma \cdot l \cos\alpha = \rho \cdot S \cdot h \cdot g$, pa je:

$$h = \frac{l\gamma}{\rho g S}\cos\alpha .$$

Za vodu je: $h_{H_2O} = \dfrac{l\gamma_{H_2O}}{\rho_{H_2O} g S} = \dfrac{d\pi\gamma_{H_2O}}{\rho_{H_2O} g \dfrac{d^2\pi}{4}} = 0{,}146$ [m] = 14,6 [cm]

Za živu je: $h_{Hg} = -\dfrac{l\gamma_{Hg}}{\rho_{Hg} g S} = -\dfrac{d\gamma_{Hg}}{\rho_{Hg} g \dfrac{d^2}{4}} =$ -0,07 [m] = - 7 [cm]

1.29. U cev koja je sužena u sredini pumpa se tečnost koja dalje struji stacionarnim tokom. Površina poprečnog preseka užeg dela cevi je S_1 = 1 [cm^2]. Površina poprečnog preseka šireg dela cevi je S_2 = 5 [cm^2]. Tečnost koja je iz suženog dela cevi ušla u širi deo cevi, struji kroz širi deo cevi brzinom v_2 = 24 [cm/s]. Između užeg i šireg dela cevi priključen je manometar. Kolika je razlika nivoa žive u cevima manometra?

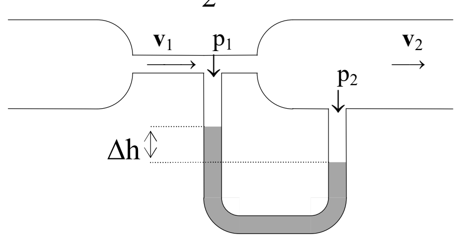
Rešenje:

U posmatranom slučaju može da se primeni Bernulijeva jednačina za horizontalno proticanje fluida:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2} \text{ , odakle je}$$

$$p_2 - p_1 = \frac{\rho}{2}(v_1^2 - v_2^2).$$

tečnost iz pumpe



Gustina tečnosti označena je simbolom ρ. Za stacionarno strujanje fluida *protok* je konstantan:

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 = \text{const} .$$

Prema tome, brzina u užem delu cevi je jednaka:

$$v_1 = \frac{S_2}{S_1} v_2 = 5 \cdot 24[\text{cm/s}] = 120 \ [\text{cm/s}].$$

Razlika pritisaka očitava se pomoću razlike visina stubova žive u cevima manometra:

$$p_2 - p_1 = \rho g \Delta h \text{, odakle je } \Delta h = \frac{p_2 - p_1}{\rho g}.$$

Uzimajući za ubrzanje sile teže $g = 9{,}81$ [m/s^2], za razliku visina se dobija:

$$\Delta h = \frac{(v_1^2 - v_2^2)}{2g} = \frac{(120^2 - 24^2)[\text{cm/s}]^2}{2 \cdot 981[\text{cm/s}^2]} = 7{,}045 \text{ [cm]}.$$

1.30. Cilindrični sud napunjen je vodom do visine od 50 [cm]. Na zidu suda nalaze se dva jednaka otvora, jedan na visini 10 [cm], a drugi na visini 20 [cm], od dna suda. Koliki je odnos masa vode koje za jednu sekundu od početka isticanja, isteknu kroz otvore?

Rešenje:

Protok tečnosti jednak je zapremini tečnosti koja prođe kroz poprečni presek toka u jedinici vremena:

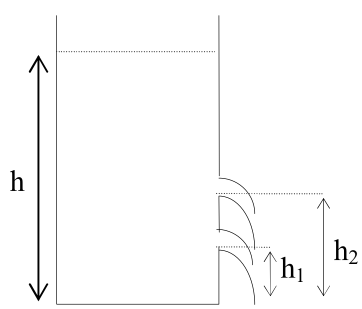
$$\frac{V}{t} = Sv.$$

Protok kroz niži otvor je:

$$\frac{V_1}{t} = Sv_1 \text{,odakle je,} V_1 = tSv_1.$$

Protok kroz viši otvor je:

$$\frac{V_2}{t} = Sv_2 \text{, odakle je, } V_2 = tSv_2.$$



Zapremina tečnosti može da se izrazi kao: $V = \dfrac{m}{\rho}$,

gde je m masa tečnosti, a ρ, gustina tečnosti.

Za niži otvor vredi: $m_1 = \rho t S v_1$.

Za viši otvor vredi: $m_2 = \rho t S v_2$.

Prema tome, odnos masa koje isteknu iz otvora za $t = 1$ [s] je:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{v_2}{v_1}.$$

Prema Toričelijevoj teoremi, brzina kojom ističe tečnost iz otvora koji se nalazi duboko u odnosu na slobodnu površinu tečnosti, jednaka je brzini slobodnog padanja tela sa visine h: $v = \sqrt{2gh}$. Za zadate visine $h_1 = 10$ [cm] i $h_2 = 20$ [cm],

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\sqrt{2g(h - h_2)}}{\sqrt{2g(h - h_1)}} = \sqrt{\frac{h - h_2}{h - h_1}} = \sqrt{\frac{30[\text{cm}]}{40[\text{cm}]}} = 0{,}87.$$

1.4 Pitanja

1.31. Plivač preplivava reku krećući se brzinom od 1 [m/s], normalno na tok reke. Reka teče brzinom od 1 [m/s]. Naći rezultantnu brzinu plivača i ugao koji vektor te brzine zatvara sa vektorom brzine reke.

1.32. Kolika je dozvoljena granična brzina v prizemljenja padobrana, ako čovek može bezopasno da padne sa visine od 2 [m]. Za ubrzanje slobodnog padanja uzeti da je g = 9,81 [m/s^2].

1.33. Dva tela istih masa leže na horizontalnoj podlozi, povezana jednom niti koja je paralelna podlozi. Nit može da izdrži zatezanje sile od 2 [N]. Koliku horizontalno usmerenu silu treba primeniti na jedno od tela, da bi se nit prekinula?

1.34. Težina tela je 9,81 [N]. Kolika je masa tela?

1.35. Teg se podigne delovanjem stalne sile od 25 [N] na visinu od 6 [m]. a) Koliki se rad izvrši? b) Koliki deo rada se utroši na promenu potencijalne energije tega, a koliki na kinetičku energiju tega? Težina tega je G = 10 [N].

1.36. Stalnom silom od 20 [N], teg se podigne na visinu od 10 [m]. Koliki se rad izvrši?

1.37. Ako je masa tela 10 [kg], a telo se delovanjem stalne sile podigne na visinu od 10 [m], kolika će biti potencijalna energija saopštena telu?

1.38. Na koju visinu može pumpa snage $2{,}0 \cdot 10^3$ [kW], da podigne 400 [m^3] vode za 1 minut rada? Gustina vode je 1000 [kg/m^3].

1.39. Naći srednju ugaonu brzinu veštačkog satelita, ako je period njegovog kretanja po kružnoj orbiti oko Zemlje 104 minuta i 30 [s].

1.40. Naći linijsku brzinu kojom Zemlja kruži oko Sunca, ako je srednji poluprečnik njene orbite $\approx 1{,}5 \cdot 10^8$ [km].

1.41. Koja je dimenzija modula elastičnosti? U kojim jedinicama se izražava u Međunarodnom sistemu jedinica (SI) ?

1.42. Od kojih veličina zavisi relativno izduženje tela, koje nastaje elastičnom deformacijom?

1.43. Pri istezanju bakarne žice površine poprečnog preseka 4,0 [mm^2], zaostala deformacija se javlja ako primenjena sila pređe 320 [N]. Koliki normalni napon odgovara granici elastičnosti?

1.44. Koliki je period oscilovanja matematičkog klatna dužine 81 [cm], u liftu koji se spušta ubrzanjem a = 0,81 [m/s^2]. Za ubrzanje sile teže uzeti g = 9,81 [m/s^2].

1.45. Koliko treba da je ubrzanje lifta koji se spušta, da u njemu matematičko klatno prestane da osciluje? Za ubrzanje sile teže uzeti g = 9,81 [m/s^2].

1.46. U kom opsegu učestanosti mehanički talas predstavlja a) zvuk, b) ultrazvuk i v) infrazvuk?

1.47. Pomoću kojih osnovnih jedinica Međunarodnog sistema (SI), može da se izrazi jedinica učestanosti 1 [Hz]?

1.48. Talas koji se prostirao brzinom c_1 kroz neku sredinu, nailazi na graničnu površinu prema drugoj sredini i nastavlja da se prostire brzinom $c_2 < c_1$. S obzirom na promenu u prostiranju talasa koja pri tome nastaje, navesti koji je od sledećih odgovora tačan:

a) povećaće se talasna dužina,
b) talasna dužina ostaje ista,
v) učestanost ostaje ista.

1.49. Aluminijumska šipka je pobuđena na oscilovanje ultra-zvučnim generatorom. Kolika je najveća talasna dužina talasa koji se prostire šipkom, ako je brzina prostiranja zvuka kroz aluminijum c = 5100 [m/s]?

1.50. Oscilovanjem žice učvršćene na oba kraja, formira se stojeći talas sa tri ″trbuha″ i dva ″čvora″. Ako je žica dugačka 1,5 [m], kolika je talasna dužina formiranog talasa?

1.51. Kako pomoću osnovnih jedinica Međunarodnog sistema (SI), može da se izrazi jedinica za pritisak, paskal?

1.52. Koliko iznosi normalni atmosferski pritisak izražen u paskalima?

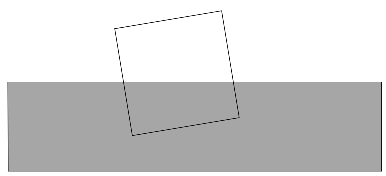
1.53. Koliko iznosi normalni atmosferski pritisak izražen u milibarima?

1.54. Manometar pokazuje da je pritisak pare u kotlu jednak $9{,}487 \cdot 10^5$ [Pa]. Kolikom silom deluje para na sigurnosni ventil kotla. Površina ventila je 400 [mm^2].

1.55. Koliki je pritisak tečnosti u sudu koji slobodno pada?

1.56. Koliki pritisak, izražen u atmosferama, trpi ronilac na dubini od 10 [m] u morskoj vodi, gustine $\rho = 1025$ [kg/m^3]?

1.57. Homogeno telo kockastog oblika, potopi se u tečnost čija je gustina veća od gustine tela, u položaju kao na slici. [ta će se dogoditi sa telom kada se prepusti samo sebi:
a) ostaće u istom položaju
b) potonuće
v) ispraviće se zakretanjem oko ose koja prolazi kroz težište u smeru kazaljke na satu
g) ispraviće se zakretanjem oko ose koja prolazi kroz težište u smeru obrnutom smeru kazaljke na satu?



1.58. Izračunati koeficijent površinskog napona tečnosti gustine $\rho = 1000$ [kg/m^3], ako se u kapilari prečnika 0,8 [mm] ta tečnost podigne za 40 [mm]. Tečnost potpuno kvasi zidove suda.

1.59. Kako glasi jednačina kontinuiteta za stacionarno strujanje fluida?

1.60. Olujni vetar pri kome je gustina vazduha $\rho = 1{,}2$ [kg/m^3], duva iznad krova kuće brzinom 30 [m/s]. Kolika je razlika pritisaka, koja deluje naviše na površinu krova?

1.5 Odgovori

1.31. $v = \sqrt{2}$ [m/s]; $\alpha = 45^0$
1.32. $v = 6{,}26$ [m/s]
1.33. $F \geq 4$ [N]
1.34. $m = 1$ [kg]

1.35. a) $A = 150$ [J]; b) $A = E_P + E_K$, $E_p = 60$ [J], $E_K = 90$ [J]
1.36. $A = 200$ [J]
1.37. $E_P = 981$ [J]
1.38. $h \approx 30$ [m]
1.39. $\omega = 0{,}001$ [rad/s]
1.40. $v \approx 30$ [km/s]
1.41. dimenzija pritiska; [N/m^2]
1.42. $\frac{\Delta l}{l} \sim \frac{1}{E_y}$; $\frac{\Delta l}{l} \sim \frac{F}{S}$, gde je E_y moduo elastičnosti, F sila istezanja a S površina poprečnog preseka tela
1.43. $\sigma = \frac{F}{S} = 8{,}0 \cdot 10^7$ [Pa]
1.44. $T = 1{,}9$ [s]
1.45. $a = 9{,}81$ [m/s^2]
1.46. a) 16 [Hz] $\leq \nu \leq 20 \cdot 10^4$ [Hz]; b) $\nu > 20 \cdot 10^4$ [Hz]; v) $\nu < 16$ [Hz]
1.47. 1 [Hz] = [1/s]
1.48. v)
1.49. $\lambda_{max} = 25{,}5$ [mm]
1.50. $\lambda = 1$ [m]
1.51. [Pa] = [kgm^{-1}s^{-2}]
1.52. $1{,}013 \cdot 10^5$ [Pa]
1.53. 1013 [mbar]
1.54. 420 [N]
1.55. $p = 0$ [Pa]
1.56. ≈ 2 atm
1.57. v)
1.58. $\gamma = 0{,}078$ [N/m]
1.59. $S \cdot v = \text{const.}$, gde je S je površina poprečnog preseka toka, a v brzina proticanja
1.60. 540 [Pa]

2. MOLEKULARNA FIZIKA I KALORIKA

2.1 Jednačina stanja idealnog gasa

2.1. Koliko molekula sadrži 1 [kg] CO_2?

Rešenje:

Količina supstancije od 1 [kmol] ima masu od 44 [kg]. Jedan [kmol] sadrži Avogadrov broj čestica: $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26}$. Dakle 1 [kg] sadrži 44 puta manje čestica:

$$N = N_A / 44 = 1{,}37 \cdot 10^{25} \ .$$

2.2. Kolika je masa jednog molekula CO_2?

Rešenje:

Ako je molarna masa CO_2, M=0,044 [kg/mol] masa jednog molekula je:

$$m = \frac{M}{N_A} = \frac{44[\text{kg/kmol}]}{6{,}023 \cdot 10^{26}[1/\text{kmol}]} = 7{,}31 \cdot 10^{-26} \text{ [kg]} \ .$$

2.3. Koliko molekula sadrži 1 [m^3] CO_2, pri normalnim uslovima? Gustina CO_2 pri normalnim uslovima je $\rho_0 = 1{,}98$ [kg/m^3].

Rešenje:

$$\rho_0 = m / V \ => \ m = \rho_0 \cdot V = 1{,}98[\text{kg/m}^3] \cdot 1[\text{m}^3] = 1{,}98 \text{ [kg]}.$$

Ako 44 [kg] sadrže $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26}$ čestica, onda je broj čestica u 1 [m^3] CO_2, (ili koncentracija) jednak:

$$N_0 = (1{,}98 \cdot 6{,}023 \cdot 10^{26}) / 44 = 2{,}7 \cdot 10^{25} \ .$$

2.4. Koliko je srednje rastojanje između molekula CO_2 u 1 [m^3] zapremine, pri normalnim uslovima? Gustina CO_2 pri normalnim uslovima je $\rho_0 = 1{,}98$ [kg/m^3].

Rešenje:

$$\rho_0 = m / V \ => \ V = V_m \cdot N_0 \ ,$$

gde je V_m zapremina po jednom molekulu, a N_0 koncentracija molekula pri normalnim uslovima.

Masa gasa u zadatoj zapremini je:

$$m = \rho_0 \cdot V = 1{,}98 \cdot 1 = 1{,}98 \text{ [kg]}.$$

Ako 44 [kg] sadrže $N_A = 6{,}023 \cdot 10^{26}$ čestica, onda je broj čestica u 1 [m^3] CO_2 , (ili koncentracija), jednak:

$$N_0 = (1{,}98 \cdot 6{,}023 \cdot 10^{26}) / 44 = 2{,}7 \cdot 10^{25}.$$

Zapremina po jednom molekulu može da se izrazi kao $V_m = d^3$, gde je d traženo rastojanje između molekula. Prema tome je $V = d^3 \cdot N_0$, odakle je:

$$d = \sqrt[3]{\frac{V}{N_0}} = \sqrt[3]{\frac{1[\mathrm{m}^3]}{2{,}7 \cdot 10^{25}}} = 3{,}3 \cdot 10^{-9}\ [\mathrm{m}]\ .$$

2.5. Naći gustinu kiseonika (O_2), pri temperaturi 300 [K] i pritisku $1{,}6 \cdot 10^5$ [Pa]. Izračunati masu koja odgovara zapremini 200 [m^3] kiseonika u tim uslovima. Univerzalna gasna konstanta je R = 8,314 [J/ (kmol·K)].

Rešenje:

Jednačina stanja idealnog gasa je: $p \cdot V = n \cdot R \cdot T$, $n = m/M$, gde je m masa gasa, a M molarna masa gasa izražena u [kg/kmol]. Molarna masa O_2 je $M = 32$ [kg/kmol].

$pV = \frac{\rho V}{M} RT$, jer je $\rho = m/V$, gustina gasa.

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{1{,}6 \cdot 10^5 [\mathrm{Pa}] \cdot 32 [\mathrm{kg/kmol}]}{300[\mathrm{K}] \cdot 8314 [\mathrm{J/(kmol \cdot K)}]} = 2{,}05\ [\mathrm{kg/m^3}]\ .$$

Masa je $m = \rho \cdot V = 200[\mathrm{m}^3] \cdot 2{,}05[\mathrm{kg/m}^3] = 410$ [kg] .

2.2 Kalorimetrija

2.6. Čelično tane koje leti brzinom 200 [m/s], udari o zemljani nasip i zaglibi se u njemu. Za koliko stepeni poraste temperatura taneta, ako se na njegovo zagrevanje utroši 60% kinetičke energije. Specifična toplota čelika je $c = 460$ [J/(kg·K)].

Rešenje:

Brzina taneta pre udara o nasip bila je $v_1 = 200$ [m/s]. Promena kinetičke energije taneta je $\Delta E = E_{k1} - E_{k0}$, gde je $E_{k1} = \frac{1}{2} m v_1^2$, a $E_{k0} = 0$ [J]. Na zagrevanje taneta utroši se $0{,}6\mathrm{E} = (1{,}2 \cdot 10^4 \cdot m)$ [J]. Utrošena energija jednaka je toploti koju primi tane, a koja je data izrazom: $Q = c \cdot m \cdot \Delta T$. Ovde je ΔT tražena promena temperture taneta. Prema tome: $c \cdot m \cdot \Delta T = 1{,}2 \cdot 10^4 \cdot m$, pa je

$$\Delta T = \frac{1{,}2 \cdot 10^4 [\mathrm{J/kg}]}{460 [\mathrm{J/(kgK)}]} = 26\ [\mathrm{K}].$$

2.7. Izračunati korak bušenja svrdlom, ako se pri bušenju otvora sa dijametrom 25 [mm] u bakarnom cilindru, cilindar zagreje za 43 [K]. Moment sile pri obrtanju svrdla je jednak 16,2 [mN]. U unutrašnju energiju cilindra pretvara se 70% energije svrdla. Specifična toplota bakra je $c = 380$ [J/(kgK)], a gustina bakra je $\rho = 8900$ [kg/m^3].

Rešenje:

Zapremina koju izbuši svrdlo jednaka je: $V = S{\cdot}x$, gde je $S = (0{,}5d)^2\pi$ površina poprečnog preseka cilindra, a x korak koji napravi svrdlo pri jednom obrtu. S druge strane, masa bakra zapremine V, je $m = \rho{\cdot}V = \rho{\cdot}S{\cdot}x$. Toplota koja se razvija data je izrazom: $Q = c{\cdot}m{\cdot}\Delta T = c{\cdot}\rho{\cdot}S{\cdot}x{\cdot}\Delta T = c{\cdot}\rho{\cdot}(0{,}5d)^2\,\pi{\cdot}x{\cdot}\Delta T$. Energija svrdla jednaka je radu koje ono izvrši pri obrtanju. U toku jednog obrta taj rad je jednak: $A = M{\cdot}2\pi$, gde je $M = 16{,}2$ [mN] moment sile. Budući da se 70% enrgije svrdla utroši na zagrevanje:

$$0{,}7M{\cdot}2\pi = c{\cdot}\rho{\cdot}(0{,}5d)^2\,\pi{\cdot}x{\cdot}\Delta T,$$

pa je korak svrdla:

$$x = \frac{0{,}7\cdot 2\cdot M}{c\cdot\rho\cdot(0{,}5d)^2\cdot\Delta T}$$

$$x = \frac{1{,}4\cdot 16{,}2[\mathrm{J}]}{380[\mathrm{J/(kgK)}]\cdot 8900[\mathrm{kg/m^3}]\cdot(0{,}5\cdot 25\cdot 10^{-3})^2[\mathrm{m^2}]\cdot 43[\mathrm{K}]} = 10^{-3}[\mathrm{m}]$$

$$x = 1\ [\mathrm{mm}]\ .$$

2.8. Koliku količinu toplote treba utrošiti da bi se 8 [kg] leda od temperature -30 [^{0}C] dovelo do tačke topljenja, rasto-pilo i da bi se tako nastala voda zagrejala do 60 [^{0}C]? Specifična toplota leda je $c = 2093$ [J/(kgK)], a vode $c_{H_2O} = 4186$[J/(kgK)]. Specifična toplota topljenja leda je $q_m = 3{,}35{\cdot}10^5$ [J/kg].

Rešenje:

Ukupna potrebna količina toplote je: $Q = Q_t + q_m\cdot m + Q_{H_2O}$.

Ovde je:

– $Q_t = m{\cdot}c{\cdot}\Delta t$, količina toplote potrebna da se temperatura leda povisi do tačke topljenja; $\Delta t = 30$ [^{0}C] ili 30[K]

– $q_m\cdot m$, količina toplote potrebna da se otopi masa leda m ,

– $Q_{H_2O} = m{\cdot}c_{H_2O}{\cdot}\Delta t'$, količina toplote potrebna da se voda zagreje od 0 [^{0}C] do 60 [^{0}C], tj. $\Delta t' = 60$ [^{0}C] ili 60[K], pri čemu je uzeto u obzir da je ΔT [K] = Δt [^{0}C]

$$Q = m{\cdot}c{\cdot}\Delta t + q_m\cdot m + m{\cdot}c_{H_2O}{\cdot}\Delta t' = 5{,}2{\cdot}10^6\ [\mathrm{J}] = 5{,}2\ [\mathrm{MJ}]\ .$$

2.9. U bakarni kotao mase 6,0 [kg], koji sadrži 20,5 litara vode na 19 [^{0}C], sipano je rastopljeno olovo, temperature 232 [^{0}C]. Pri tome 0,10 [kg] vode ispari, a preostala voda je na temperaturi od 32 [^{0}C]. Odrediti masu olova. Specifični toplotni kapacitet bakra je $c_{Cu} = 3{,}8{\cdot}10^2$ [J/(kgK)], vode $c_{H_2O} = 4{,}186{\cdot}10^3$ [J/(kgK)], a olova $c_{Pb} = 2{,}5{\cdot}10^2$ [J/(kgK)]. Specifična toplota isparavanja vode je $q_{H_2O} = 2{,}26{\cdot}10^6$ [J/kg], a specifična toplota topljenja (i kristalizacije) olova je $q_{Pb} = 5{,}8{\cdot}10^4$ [J/kg].

Rešenje:

Toplota koju sistem (bakarni sud sa vodom), primi od rastopljenog olova, jednaka je zbiru toplote koju olovo izgubi hlađenjem i latentne toplote topljenja olova:

$$Q = \Delta Q_{Pb} + Q_t$$

$$\Delta Q_{Pb} = m_{Pb} \cdot c_{Pb} \cdot \Delta T = m_{Pb}\,[\text{kg}] \cdot 2{,}5 \cdot 10^2\,[\text{J/(kgK)}] \cdot (505 - 305)\,[\text{K}]$$

$$\Delta Q_{Pb} = 5 \cdot 10^4\, m_{Pb}\,[\text{J}]$$

$$Q_t = m_{Pb}[\text{kg}] \cdot q_{Pb}\,[\text{J/kg}] = 5{,}8 \cdot 10^4\, m_{Pb}\,[\text{J}]$$

$$Q = (5 \cdot 10^4 + 5{,}8 \cdot 10^4)\, m_{Pb} = 10{,}8 \cdot 10^4\, m_{Pb}\,[\text{J}]$$

Količina toplote Q, troši se na:

1. zagrevanje bakrenog kotla,

$$\Delta Q_{Cu} = m_{Pb} \cdot c_{Pb} \cdot \Delta T_1 = 6\,[\text{kg}] \cdot 3{,}8 \cdot 10^2\,[\text{J/(kgK)}] \cdot (305 - 292)\,[\text{K}] = 29{,}4 \cdot 10^3\,[\text{J}],$$

2. zagrevanje vode u kotlu

$$\Delta Q_{H_2O} = m_{H_2O} \cdot c_{H_20} \cdot \Delta T_2 = 20{,}5\,[\text{kg}] \cdot 4{,}186 \cdot 10^3\,[\text{J/(kgK)}] \cdot (305 - 292)\,[\text{K}]$$

$$\Delta Q_{H_2O} = 1115{,}6 \cdot 10^3\,[\text{J}],$$

3. isparavanje vode,

$$Q_{H_2O} = m_{H_2O} \cdot q_{H_2O} = 0{,}1[\text{kg}] \cdot 2{,}26 \cdot 10^6\,[\text{J/kg}] = 226 \cdot 10^3\,[\text{J}].$$

$$\Delta Q_{Cu} + \Delta Q_{H_2O} + Q_{H_2O} = Q$$

$$29{,}4 \cdot 10^3\,[\text{J}] + 1115{,}6 \cdot 10^3\,[\text{J}] + 226 \cdot 10^3\,[\text{J}] = 10{,}8 \cdot 10^4\, m_{Pb}\,[\text{J}],$$

$$m_{Pb} = 12{,}7\,[\text{kg}].$$

2.10. Iz suda u kome se nalazi 575 [g] vode na 0 [^{0}C], ispumpa se vazduh i vodena para, zbog čega se deo vode u njemu zamrzne. Odredi masu nastalog leda. Specifična toplota isparavanja vode je $q = 2{,}26 \cdot 10^6$ [J/kg], a specifična toplota kristalizacije vode je $q' = 3{,}35 \cdot 10^5$ [J/kg].

Rešenje:

Masa vode koja ispari m, odnosi se prema masi vode koja se zaledi m', kao specifična toplota kristalizacije vode prema specifičnoj toploti isparavanja vode:

$$\frac{m}{m'} = \frac{q'}{q} = 0{,}132\,; \quad 0{,}132\, m' + m' = 0{,}575\,[\text{kg}],$$

odakle je $m' = 0{,}508$ [kg].

2.3 Zakoni toplotnog širenja tela

2.11. Na temperaturi 0 [^{0}C] odmerana je dužina od 300 [m], aluminijske i čelične žice. Koliko će se razlikovati dužine ovih dveju žica na 100 [^{0}C]. Linearni koeficijent toplotnog širenja aluminijuma je $\alpha_{Al} = 2{,}3\cdot10^{-5}$ [^{0}C]$^{-1}$, a linearni koeficijent toplotnog širenja čelika $\alpha_{Fe} = 1{,}2\cdot10^{-5}$ [^{0}C]$^{-1}$.

Rešenje:

Ako je l_0 dužina žice na temperaturi 0 [^{0}C], dužina žice na temperaturi t [^{0}C] je:

$l_t = l_0\cdot(1 + \alpha\cdot t)$. Za aluminijumsku žicu je

$$l_{Al} = 300[\text{m}]\cdot(1 + 2{,}3\cdot10^{-5}[^0\text{C}]^{-1}\cdot100[^0\text{C}]) = 300{,}69\ [\text{m}].$$

Za čeličnu žicu je

$$l_{Fe} = 300[\text{m}]\cdot(1 + 1{,}2\cdot10^{-5}\ [^0\text{C}]^{-1}\cdot100[^0\text{C}]) = 300{,}36\ [\text{m}].$$

Razlika dužina žica na 100 [^{0}C] je 0,33 [m].

2.12. Čelična šipka je učvršćena na oba kraja šipovima, na temperaturi od 22 [^{0}C], a zatim ohlađena. Na kojoj temperaturi bi došlo do kidanja šipke?

Temperaturski koeficijent linearnog širenja čelika je $\alpha = 11\cdot10^{-6}$ [°C]$^{-1}$, normalni napon kidanja čelika je $\sigma = 400\cdot10^9\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$, Jungov moduo elastičnosti čelika je $E_y = 200\cdot10^9\left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2}\right]$.

Rešenje:

Zavisnost relativne deformacije od normalnog napona data je izrazom

$$\frac{\Delta l}{l} = \sigma\frac{1}{E_y},$$

gde je Δl apsolutna deformacija, l prvobitna dužina šipke, σ normalni napon, a E_y Jungov moduo elastičnosti. U posmatranom slučaju, šipka se sabija, pa je relativna deformacija negativna. Sa druge strane, dužina šipke se smanjuje zbog promene temperature po zakonu:

$$\frac{\Delta l}{l} = \alpha\cdot\Delta t$$

gde je α temperaturski koeficijenat linearnog širenja a Δt je promena temperature. Na osnovu dva načina izražavanja relativne deformacije, proizilazi:

$$\sigma\cdot\frac{1}{E_y} = \alpha\cdot\Delta t$$

Uvrštavanjem vrednosti normalnog napona kidanja šipke i ostalih veličina, dobija se:

$$\Delta t = 22[°C] - t[°C] = \frac{\sigma}{E_y \cdot \alpha} = \frac{400 \cdot 10^6 \left[\frac{N}{m^2}\right]}{200 \cdot 10^9 \left[\frac{N}{m^2}\right] \cdot 11 \cdot 10^{-6} \left[°C\right]^{-1}} = 182\left[°C\right],$$

odatle je $t = 22$ [°C] - 182 [°C] = –160 [°C].

2.13. Na temperaturi od 0[^{0}C], list cinka ima dimenzije S_0=120×100 [mm^2]. Kolika će biti površina ovog lista na 500 [^{0}C]. Linearni koeficijent toplotnog širenja cinka je $\alpha_{Zn} = 2{,}9 \cdot 10^{-5}$ [^{0}C]$^{-1}$.

Rešenje:

Ako je a_0 = 120 [mm] jedna stranica na 0 [^{0}C], a b_0 = 100 [mm] druga stranica na 0 [^{0}C], tada je $a_0 \times b_0 = S_0$, površina lista cinka na 0 [^{0}C]. Površina ne temperaturi t [^{0}C] je $S_t = a_t \times b_t$, gde je

$$a_t = a_0\,(1 + \alpha_{Zn} \cdot t),$$
$$b_t = b_0\,(1 + \alpha_{Zn} \cdot t).$$

Prema tome,

$$S_t = a_0 \times b_0 (1 + \alpha_{Zn} \cdot t)^2$$

S_t= 12000[mm^2]$\cdot$(1 + 2,9$\cdot$10^{-5} [^{0}C]$^{-1}\cdot$500[^{0}C])^2 = 12350 [mm^2].

2.14. Barometarska skala je izrađena od mesinga. Na temperaturi T_1=300 [K], visina stuba žive očitana na skali je h_1=751,3 [mm]. Kolika bi bila visina stuba žive koja bi se očitala na skali na temperaturi T_2=273 [K]. Temperaturski koeficijent linearnog širenja mesinga je $\alpha=19 \cdot 10^{-6}$ [K]$^{-1}$, a temperaturski koeficijenat zapreminskog širenja žive je $\gamma=182 \cdot 10^{-6}$ [K]$^{-1}$.

Rešenje:

Zapremina žive u barometarskoj cevi je jednaka:

$V_1 = S \cdot h_1$, na temperaturi T_1 i

$V_2 = S \cdot h_2$, na temperaturi T_2,

gde je S površina baze cevi, koja se pri promeni temperature ne menja. Relativna promena zapremine žive pri hlađenju barometra je jednaka:

$$\frac{\Delta V}{V} = \gamma \cdot \Delta T \ ,$$

gde je $\Delta V = S \cdot \Delta h = S \cdot (h_2 - h_1)$. Promena temprature je $\Delta T = T_2 - T_1$.

Relativna promena zapremine je negativna. Visina stuba h_2, na temperaturi T_2, jednaka je:

$$h_2 = [\gamma \cdot (T_2 - T_1) + 1] \cdot h_1$$

Uvrštavanjem zadatih vrednosti dobija se

$$h_2=[182\cdot 10^{-6}[K]^{-1}\cdot(273[K]-300[K])+1]\cdot 751{,}3[mm]=747{,}6[mm]$$

Visina h_2 je stvarna visina stuba žive. Međutim na skali barometra očitava se veća vrednost od h_2, jer se hlađenjem smanjuje gustina skale po zakonu:

$$\frac{\Delta l}{l}=\alpha\cdot\Delta T\ ,$$

gde je $\frac{\Delta l}{l}$, relativna deformacija (sabijanja) dužine skale.

$$\frac{\Delta l}{l}=19\cdot 10^{-6}[K]^{-1}\cdot(273-300)[K]=-0{,}0005 \text{ ili } 0{,}05\%$$

Tražena visina očitana na skali barometra je:

$$h=h_2+0{,}05\%\cdot \mathrm{h}_2=747{,}6[mm]+0{,}374[mm]\approx 748[mm]\ .$$

2.15. U cilindričnu vertikalno postavljenu cisternu je nalivena nafta na temperaturi -10 [^{0}C], do nivoa od 8 [m]. Koliki će biti nivo nafte u cisterni, ako se temperatura povisi na 20 [^{0}C]. Na kojoj temperaturi nafta počinje da se preliva preko ruba otvora cisterne, ako je na -10 [^{0}C] nivo nafte bio 32 [cm] ispod ruba. Zapreminski koeficijent toplotnog širenja nafte je $\gamma = 10^{-3}$ [^{o}C]$^{-1}$. Toplotno širenje cisterne je zanemarljivo.

Rešenje:

Ako je V_0 zapremina nafte na 0 [^{0}C], onda je $V_t = V_0\ (1 + \gamma\cdot t)$, zapremina na temperaturi t [^{0}C]. Zapremina nafte u cisterni je: $V = S\cdot h$, gde je S površina poprečnog preseka cisterne a h, visina stuba nafte. Na temperaturi -10 [^{0}C], zapremina nafte je

$$V_{-10} = S\,[m^2]\cdot 8\,[m] = V_0\,[m^3][1 + 10^{-3}[^0C]^{-1}\cdot(-10)\,[^0C]]\ .$$

Zapremina nafte na temperaturi 20 [^{0}C], će biti

$$V_{20} = S\,[m^2]\cdot h'\,[m] = V_0[m^3](1 + 10^{-3}[^0C]^{-1}\cdot 20[^0C])\ ,$$

gde je h' odgovarajući nivo nafte . Iz odnosa:

$$\frac{V_{20}}{V_{-10}}=\frac{S\cdot h'}{S\cdot h}=1{,}03$$

$$h'= 1{,}03\cdot h = 8{,}24\ [m]\ .$$

Visina cisterne je 8 [m] + 0,32 [m] = 8,32 [m].

Zapremina cisterne je (S·8,32) [m^3]. Ovu zapreminu nafta će zauzeti na temperaturi za koju važi

$$(S\cdot 8{,}32)[\mathrm{m}^3] = V_0\,[\mathrm{m}^3](1+10^{-3}[^0\mathrm{C}]^{-1}\cdot t[^0\mathrm{C}]).$$

Budući da je

$$(S\cdot 8{,}24)[\mathrm{m}^3] = V_0\,[\mathrm{m}^3](1+10^{-3}[^0\mathrm{C}]^{-1}\cdot 20[^0\mathrm{C}]),$$

$$V_0=\frac{(S\cdot 8{,}24)[\mathrm{m}^3]}{(1+10^{-3}[^0\mathrm{C}]^{-1}\cdot 20[^0\mathrm{C}])}\ ,$$

$$8{,}32[\mathrm{m}]=\frac{8{,}24[\mathrm{m}](1+10^{-3}[^0\mathrm{C}]\cdot t[^0\mathrm{C}])}{1+10^{-3}[^0\mathrm{C}]\cdot 20[^0\mathrm{C}]}\ ,$$

odakle je t = 29,9 [^{0}C].

2.4 Pitanja

2.16. Kolika je temperatura trojne tačke vode, izražena u [K]? Kolika ja ta temperatura izražena u [^{o}C]?

2.17. Ako se telo na temperaturi t = 15 [^{0}C] zagreje za 35 [^{0}C], kolika će biti njegova apsolutna temperatura?

2.18. Koliko se molekula nalazi u jednom gramu vode?
Avogadrov broj je $N_A = 6{,}023\cdot 10^{23}$ [molekula/mol].

2.19. Gram kiseonika O_2 zaprema 560 litara. Koliki je pritisak tog gasa na temperaturi T = 400 [K]? Univerzalna gasna konstanta je R = 8,314 [J/(molK)].

2.20. Naći gustinu kiseonika (O_2) pri normalnim uslovima: p_0=1,013·10^5 [Pa], t=0[°C], R= 8,314[J/(mol·K)].

2.21. U sudu sa vodom pliva komadić leda. Da li će se nivo vode izmeniti kada se led otopi, ako voda ostane na temperaturi od 0 [^{0}C]?

2.22. U kojim jedinicama se izražava specifični toplotni kapacitet tela?

2.23. U kojim jedinicama se izražava temperaturski koeficijent zapreminskog širenja tela?

2.24. Koliko iznosi temperaturski koeficijent širenja gasova?

2.25. Koliki je mehanički ekvivalent toplote?

2.4 Odgovori

2.16. 273,16 [K]; 0,01 [°C]

2.17. $T = 323$ [K]

2.18. $3{,}34 \cdot 10^{22}$

2.19. $p \approx 186$ [P_a]

2.20. $\rho = 1{,}43$ [kg/m^3]

2.21. neće se izmeniti

2.22. [J/(kgK)]

2.23. $\frac{1}{[{}^0C]}$ ili $\left[\frac{1}{K}\right]$

2.24. $\gamma = \frac{1}{273}\left[\frac{1}{{}^0C}\right]$

2.25. 4,18 [J/cal]

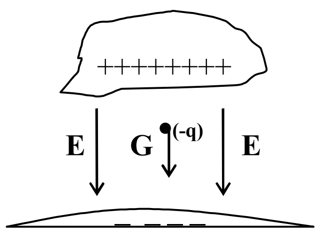
3. OSNOVE FIZIKE ELEKTRIČNIH I MAGNETSKIH POJAVA

3.1 Elektrostatika

3.1. Raspršena sferna kapljica vode prečnika 1,2 [μm], lebdi u hladnoj atmosferi, zbog atmosferskog električnog polja jačine 462 [N/C], usmerenog ka tlu. Koliko elektrona viška sadrži kapljica?

Rešenje:

Na kapljicu deluje sila teže (težina), $G = m \cdot g$, gde je m masa kapljice, a g ubrzanje sile teže. U suprotnom smeru na kapljicu deluje Kulonova sila. Kapljica se nalazi u stanju ravnoteže, što znači da su sila teža i Kulonova sila jednake po iznosu. Iznos Kulonove sile dat je sledećim izrazom:



$$F_c = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq_p}{r^2} = E \cdot q_p \quad ,$$

gde je q naelektrisanje oblaka koje stvara električno polje E, q_p je naelektrisanje kapljice, r je rastojanje između q i q_p, a ε_o je električna konstanta vakuuma (ili vazduha). U jednačini je uzeto u obzir da je jačina polja po definiciji jednaka sili koja deluje na jedinično naelektrisanje. U stanju ravnoteže je:

$$G = E \cdot q_p \,,$$

odakle je $q_p = \frac{G}{E}$. Masa kapljice može da se izrazi pomoću gustine ρ i zapremine $V = \frac{4}{3}\pi(d/2)^3$, na sledeći način:

$$m = \rho V = \rho\frac{4}{3}\pi\left(d/2\right)^3,$$

gde je ρ= 1000 [kgm^{-3}] gustina vode, a $d = 1{,}2 \cdot 10^{-6}$ [m], prečnik kapljice. Ako se za ubrzanje sile teže uzme vrednost $g = 9{,}81$ [ms^{-2}], težina kapljice je:

$$G = 10^3[\text{kgm}^{-3}] \cdot \frac{4}{3}\pi(\frac{1{,}2}{2} \cdot 10^{-6})^3[\text{m}^3] \cdot 9{,}81[\text{ms}^{-2}] = 8{,}87 \cdot 10^{-15}[\text{N}] \;.$$

Prema tome,

$$q_p = \frac{8{,}87 \cdot 10^{-15}[\text{N}]}{462\ [\text{N/C}]} = 1{,}92 \cdot 10^{-17}[\text{C}] \;.$$

Budući da je naelektrisanje elektrona $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ [C], broj elektrona viška je $q_p/e \approx 120$.

3.2. Odredi količinu tačkastog naelektrisanja koje na rastojanju od 9 [cm] stvara u vakuumu polje jačine $4 \cdot 10^5$ [N/C]. Koliko bliže treba da bude tačka u kojoj je polje iste jačine, ako se tačkasto naelektrisanje nalazi u sredini relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 2$. Električna konstanta vakuuma je $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ [C^2 /(Nm^2)].

Rešenje:

Jačina polja koje stvara tačkasto naelektrisanje q, u tački prostora na rastojanju r od njega, je:

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\frac{q}{r^2} \ ,$$

gde je za vakuum $\varepsilon_r = 1$. Prema tome, u vakuumu je:

$$q = 4\pi\varepsilon_0 r^2 E$$

$$q = 4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}[\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}] \cdot 9 \cdot 10^{-4}[\mathrm{m^2}] \cdot 4 \cdot 10^5[\mathrm{N/C}]$$

$$q \ = \ 3{,}6 \cdot 10^{-7}[C].$$

Da bi u nekoj tački bliže naelektrisanju polje ostalo iste jačine u sredini relativne dielektrične konstante $\varepsilon_r = 2$, rastojanje te tačke od naelektrisanja treba da bude jednako:

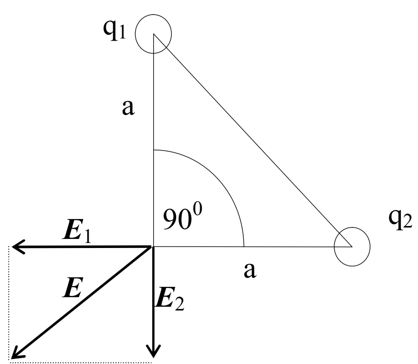
$$r' = \sqrt{\frac{3{,}6 \cdot 10^{-7}[\mathrm{C}]}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}[\mathrm{C^2N^{-1}m^2}] \cdot 2 \cdot 4 \cdot 10^5[\mathrm{N/C}]}} = 0{,}064[\mathrm{m}] \quad .$$

Tražena tačka je bliže naelektrisanju za:

$$r - r' = 0{,}09 \ [\mathrm{m}] - 0{,}064 \ [\mathrm{m}] = 0{,}026 \ [\mathrm{m}] \ .$$

3.3. Dva tačkasta naelektrisanja, $q_1 = 3 \cdot 10^{-8}$ [C] i $q_2 = 4 \cdot 10^{-8}$ [C], smeštena su u dva vrha ravnokrakog trougla. Odrediti intenzitet električnog polja u vakuumu, u trećem vrhu, čiji pripadni ugao 90^0 zatvaraju stranice dužine $a = 0{,}5$ [m]. Električna konstanta vakuuma je $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ [C^2 /(Nm^2)].

Rešenje:



Budući da je električno polje vektorska veličina, najpre treba da se saberu vektori električnih polja $\boldsymbol{E}_1$ i $\boldsymbol{E}_2$, koja naelektrisanja q_1 odnosno q_2, stvaraju u trećem vrhu:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2.$$

Ovde je $\boldsymbol{E}$ rezultantno električno polje. Zatim se izračuna intenzitet rezultant-nog električnog polja:

$$E = \sqrt{E_1^2 + E_2^2}$$

Intenziteti električnih polja $\boldsymbol{E}_1$ i $\boldsymbol{E}_2$ su jednaki:

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{a^2} \ \text{, odnosno} \ E_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q_1}{a^2} \ ,$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\sqrt{(q_1^2 + q_2^2\,)}$$

$$E = \frac{1}{4\pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}[\mathrm{N^{-1}C^2m^{-2}}] \cdot 0{,}25[\mathrm{m^2}]}\sqrt{(3 \cdot 10^{-8}[\mathrm{C}])^2 + (4 \cdot 10^{-8}[\mathrm{C}])^2}$$

$$E \approx 1{,}8 \cdot 10^3 \ [\mathrm{N/C}] \ .$$

3.4. Koliki je potencijal u trećem vrhu trougla, za slučaj koji je opisan u predhodnom zadatku?

Rešenje:

Potencijal električnog polja koje stvara naelektrisanje q_1, na rastojanju a od tog naelektrisanja, jednak je: $V_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Potencijal električnog polja koje stvara naelektrisanje q_2, na rastojanju a od tog naelektrisanja, jednak je: $\varphi_1 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 a}$. Potencijal je skalarna veličina, pa se ukupni potencijal u trećem uglu trougla dobija sabiranjem potencijala V_1 i V_2:

$$V = V_1 + V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a}(q_1 + q_2) \ .$$

Uvrštavanjem u gornju jednačinu vrednosti za lj$_1$, lj$_2$ i a, zadatih u predhodnom zadatku i vrednosti električne konstante vakuuma $\varepsilon_0 = 8{,}85\cdot10^{-12}$ [$C^2/(Nm^2)$], dobija se:

$$V = \frac{3\cdot10^{-8}[\mathrm{C}] + 4\cdot10^{-8}[\mathrm{C}]}{4\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}[\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}]\cdot0{,}5[\mathrm{m}]} = 1260\ [\mathrm{V}].$$

3.5. Homogena, usamljena provodna kugla, poluprečnika R = 5 [cm], koja se nalazi u vazduhu, naelektrisana je količinom naelektrisanja q = 25 [nC].

a) Koliki je potencijal na površini kugle?

b) Koliki je potencijal u centru kugle?

v) Koliki je potencijal na rastojanju r = 95 [cm] od površine kugle, u pravcu normalnom na površinu?

Rešenje:

a) Električno polje homogene, provodne kugle je jednako:

$E = \frac{V}{R}$, gde je V potencijal, a R poluprečnik kugle. Fluks električnog polja kugle je jednak: $\Phi = E \cdot S = \frac{q}{\varepsilon_0}$, gde je S = $4\pi R^2$ površina kugle, a lj količina naelektrisanja dovedena kugli. Prema tome:

$$V = \frac{q}{\varepsilon_0}\cdot\frac{R}{4\pi R^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R},$$

$$V = \frac{25\cdot10^{-9}[\mathrm{C}]}{4\pi\cdot8{,}85\cdot10^{-12}[\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}]\cdot0{,}05[\mathrm{m}]} \approx 4500[\mathrm{V}].$$

b) Naelektrisanje je ravnomerno raspoređeno po zapremini kugle, pa je potencijal u centru kugle takođe V = 4500 [V].

v) Na rastojanju 100 [cm] od centra kugle, potencijal je jednak:

$$V = \frac{25 \cdot 10^{-9}[\mathrm{C}]}{4\pi \cdot 8,85 \cdot 10^{-12}[\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}] \cdot 0,025[\mathrm{m}]} \approx 9000\ [\mathrm{V}].$$

2.2 Elektrodinamika

3.6. Jačina struje snopa elektrona, koji stvara sliku na ekranu monitora, je 200 [μA]. Koliko elektrona udari o monitor svake sekunde?
Rešenje:
Jačina struje snopa elektrona je data izrazom: $I = \frac{q}{t}$, gde je lj količina naelektrisanja koja protekne za vreme t između izvora snopa (katodne cevi) i ekrana. Količina naelektrisanja je jednaka proizvodu između broja elektrona N i elementarnog naelektrisanja, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ [C]:

$$q = N \cdot e = N \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}\ [\mathrm{C}]\ .$$

Prema tome, jačina struje je jednaka: $I = \frac{Ne}{t}$. Broj elektrona koji za vreme t udari o ekran je $N = \frac{I \cdot t}{e}$. U jednoj sekundi o ekran udari:

$$N = \frac{200 \cdot 10^{-6}[\mathrm{A}] \cdot 1[\mathrm{s}]}{1,6 \cdot 10^{-19}[\mathrm{C}]} = 125 \cdot 10^{13} \text{ elektrona.}$$

3.7. Predviđeno je da grejač vode radi na naponu od 220 [V] i pri jačini struje $I = 6$ [A]. Kolika treba da budu dužina i površina poprečnog preseka provodnika od koga je napravljen grejač, ako je maksimalna dozvoljena gustina struje 12 [A/mm^2]? Specifična otpornost legure od koje je provodnik načinjen je $\rho = 1,3 \cdot 10^{-6}$ [Ωm]. (Predpostavlja se da je promena dimenzija pri zagrevanju provodnika, zanemarljiva).
Rešenje:
Gustina struje koja teče provodnikom je po definiciji jednaka: $j = \frac{I}{S}$, gde je I jačina struje, a S površina poprečnog preseka provodnika. Uvrštavanjem zadatih vrednosti, dobija se za površinu poprečnog preseka:

$$S = \frac{I}{j} = \frac{6[\mathrm{A}]}{12 \cdot 10^{6}[\mathrm{A}][\mathrm{m^{-2}}]} = 0,5 \cdot 10^{-6}\ [\mathrm{m^2}]\ .$$

Otpornost provodnika data je izrazom: $R = \rho \frac{l}{S}$, gde je l dužina provodnika. Prema Omovom zakonu, napon na krajevima provodnika jednak je $U = RI$, odakle je:

$$R = \frac{U}{I} = \frac{220[\mathrm{V}]}{6[\mathrm{A}]} = 37\ [\Omega]\ .$$

Iz izraza za otpornost provodnika, proizilazi da je dužina provodnika:

$$l = \frac{RS}{\rho} = \frac{37[\Omega] \cdot 0,5 \cdot 10^{-6}[\mathrm{m^2}]}{1,3 \cdot 10^{-6}[\Omega\mathrm{m}]} = 14,2\ [\mathrm{m}].$$

3.8. Osigurač od žice cilindričnog oblika, topi se pri gustini struje od 440 [A/cm^2], pri čemu se prekida struja u kolu. Koliki treba da bude prečnik preseka osigurača, da bi jačina struje u kolu bila ograničena na 0,5 [A]?

Rešenje:

Gustina struje koja teče provodnikom je po definiciji jednaka: $j = \frac{I}{S}$, gde je I jačina struje, a S površina poprečnog preseka provodnika. Da bi jačina struje bila ograničena na 0,5 [A], površina poprečnog preseka osigurača treba da bude jednaka: $S = \frac{I}{j}$.

Površina poprečnog preseka osigurača je:

$$S = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \pi \ ,$$

gde je d prečnik preseka. Izjednačavanjem dva izraza za površinu, dobija se:

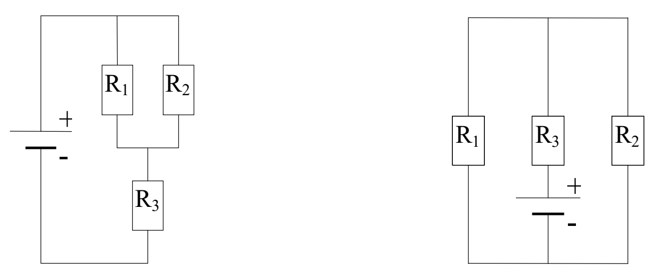
$$\left(\frac{\mathrm{d}}{2}\right)^2 \pi = \frac{\mathrm{I}}{\mathrm{j}} \ ,$$

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot 0{,}5[\mathrm{A}]}{440 \cdot 10^4 [\mathrm{Am}^{-2}] \cdot 3{,}14}} = 0{,}38 \cdot 10^{-3}\ [\mathrm{m}] \ ,$$

ili

$$d = 0{,}38\ [\mathrm{mm}] \ .$$

3.9. Tri potrošača otpornosti R_1, R_2 i R_3, vezana su najpre u strujno kolo kao na slici a), a zatim u strujno kolo kao na slici b). Da li je ekvivalentna otpornost kola: a) veća od ekvivalentne otpornosti kola b), manja od ekvivalentne otpornosti kola b), jednaka ekvivalentnoj otpornosti kola b)?



a) b)

Rešenje:

U oba kola otpornost R_3 je redno vezana na paralelnu vezu otpornosti R_1 i R_2. Prema tome, ekvivalentna otpornost je jednaka za kolo a) i za kolo b) i računa se na sledeći način:

$$R_e = R'_e + R_3, \text{ gde je } R'_e = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2},$$

$$R_e = \frac{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}{R_1 + R_2} \ .$$

3.10. Potrošač nepoznate otpornosti priključen je na bateriju od 3 [V]. Snaga električne struje koja teče kroz potrošač je 0,540 [NJ]. Koliko će energije u jedinici vremena biti utrošeno, ako se potrošač priključi na bateriju od 1,5 [V]?

Rešenje:

Snaga u kolu jednosmerne struje je data izrazom:

$$P = \frac{U^2}{R} \ ,$$

gde je U napon na krajevima potrošača, a R otpornost potrošača. Ako je potrošač priključen na napon od 3 [V], njegova otpornost može da se izračuna na sledeći način:

$$R = \frac{(3)^2[\mathrm{V}^2]}{0,540[\mathrm{W}]} = 16,7\ [\Omega].$$

Poznavajući otpornost potrošača, energija utrošena u jednoj sekundi, ako je potrošač priključen na napon od 1,5 [V], može da se izračuna pomoću relacije:

$$A = \frac{U^2}{R}t = \frac{1,5^2[\mathrm{V}^2]}{16,7[\mathrm{W}]}\cdot 1[\mathrm{s}] = 0,135\ [\mathrm{J}]\ .$$

3.3 Elektromagnetika

3.11. Sredina u kojoj su smeštena dva paralelna provodnika na rastojanju od 10 [cm], je vazduh. Prvi provodnik privlači silom od $6\cdot 10^{-3}$ [N] drugi provodnik, čija je dužina 3 [m] i kojim teče struja jačine 50 [A]. Kolika je jačina struje koja teče prvim provodnikom? Da li je smer struje u oba provodnika isti?

Rešenje:

Sila kojom prvi provodnik privlači drugi (*Amperova sila*), je:

$$F_1 = B_1 I_2 l_2 \ ,$$

gde je B_1 magnetska indukcija polja koje nastaje proticanjem struje kroz prvi provodnik; I_2 je jačina struje koja protiče kroz drugi provodnik, a l_2 je dužina drugog provodnika. Prema Bio-Savarovom zakonu, iznos magnetske indukcije prvog provodnika na rastojanju d od drugog provodnika je:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}\ .$$

Magnetska permeabilnost vazduha približno je jednaka magnetskoj permeabilnosti vakuuma $\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}$ [TmA^{-1}]. Uvrštavanjem izraza za magnetsku indukciju u izraz za silu kojom prvi provodnik privlači drugi, dobija se:

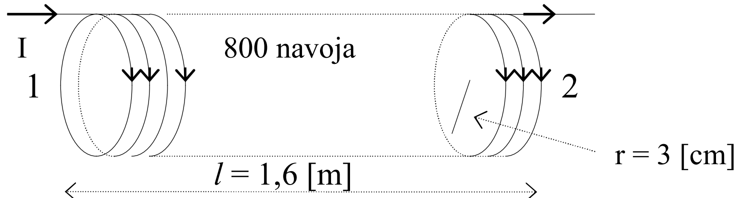
$$F_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} I_2\ l_2 \ , \text{ odakle je,}$$

$$I_1 = \frac{2\pi\cdot d\cdot F}{\mu_0 I_2 l_2} = \frac{2\pi\cdot 0,1[\mathrm{m}]\cdot 6\cdot 10^{-3}[\mathrm{N}]}{4\pi\cdot 10^{-7}[\mathrm{TmA}^{-1}]\cdot 50[\mathrm{A}]\cdot 3[\mathrm{m}]} = 20\ [\mathrm{A}]\ .$$

Prvim provodnikom teče struja ječine 20 [A]. Sila kojom drugi provodnik privlači prvi je $F_2 = F_1$. Dakle, radi se o sili među-obnog privlačenja, jer je smer proticanja struje u oba provodnika je isti.

3.12. Solenoid dužine 1,6 [m] ima 800 navoja. Poluprečnik navoja je jednak 3 [cm]. Solenoidom teče struja jačine 6 [A], čiji je smer proticanja kroz navoje naznačen na slici. Kome kraju, (1 ili 2), odgovara severni pol magnetskog polja solenoida? Ko-liki je magnetski fluks kroz solenoid?

Rešenje:



Ako postavimo savijene prste desne ruke u smeru proticanja struje kroz navoje, ispruženi palac pokazuje prema severnom polu magnetskog polja solenoida ("pravilo desne ruke"). Dakle severni pol (N) je kod kraja 2. Magnetska indukcija u unutrašnjosti solenoida smeštenog u vazduhu, kojim teče struja jačine I, data je izrazom:

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I,$$

gde je $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [TmA^{-1}] magnetska permeabilnost vakuuma ili približno vazduha, N broj navoja, a l dužina solenoida. Magnetski fluks kroz solenoid je $\Phi = B \cdot S$, gde je S = $r^2\pi$, površina navoja izražena pomoću poluprečnika r. Uvrštavanjem izraza za magnetsku indukciju dobije se:

$$\Phi = \mu_0 r^2 \pi \frac{N}{l} I = 4\pi \cdot 10^{-7} [\mathrm{TmA^{-1}}] (0{,}03)^2 [\mathrm{m^2}] \cdot \pi \frac{800}{1{,}6[\mathrm{m}]} \cdot 6[\mathrm{A}]$$

$$\Phi = 10{,}7 \cdot 10^{-6} [\mathrm{Wb}]\,.$$

3.13. Kolika je srednja vrednost elektromotorne sile samoindukcije, ako struja u solenoidu iz zadatka 3.12, padne od 6 [A] na 0 [A] u intervalu Δt = 0,2 [s]. Koliki će biti koeficijent samoindukcije (induktivnost) solenoida iz zadatka 3.12, ako se u solenoid unese jezgro od gvožđa, relativne magnetske permeabilnosti $\mu_r = 400$.

Rešenje:

Promenom jačine struje koja teče kroz svaki od navoja za ΔI, promeni se magnetska indukcija za $\Delta B = \mu_0 \frac{N}{l} \Delta I$, a time i magnetski fluks za

$$\Delta\Phi = S\,\Delta B = \mu_0 \frac{N}{l} \Delta I \;\; S.$$

Srednja vrednost elektromotorne sila koja se indukuje po jednom navoju je $\varepsilon_1 = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$,

a za N navoja vredi: $\Delta\varepsilon = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$. Ako se uvrsti promena fluksa dobije se:

$$\varepsilon = -\mu_0 \cdot S \frac{N^2}{l} \cdot \frac{\Delta I}{\Delta t}\,.$$

Veličina $L = \mu_0 S \frac{N^2}{l}$ je koeficijent samoindukcije ili *iduktivnost* solenoida. Prema podacima o solenoidu iz zadatka 3.12,

$$L = 4\pi \cdot 10^{-7}\left[\mathrm{TmA^{-1}}\right]\cdot(0,03)^2\cdot\pi\left[\mathrm{m^2}\right]\cdot\frac{800^2}{1,6\left[\mathrm{m}\right]} = 1,42\ [\mathrm{mH}]\ .$$

Budući da je promena struje u intervalu od Δt = 0,2 [s], jednaka ΔI = 6 [A] - 0 [A] = 6 [A], srednja vrednost elektromotorne sile je:

$$\varepsilon = 1,42[\mathrm{mH}]\cdot\frac{6[\mathrm{A}]}{0,2[\mathrm{s}]} \approx 42\ [\mathrm{mV}]\ .$$

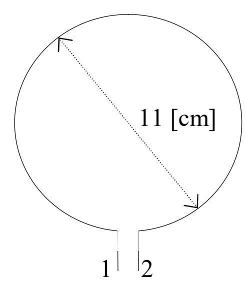
Ako se u solenoid unese gvozdeno jezgro, induktivnost se poveća μ_r puta, pa iznosi 568 [mH].

3.14. Sobna televizijska antena za prijem UHF talasa načinjena je od kružno savijenog provodnika, kao na slici. Prečnik kruga je 11 [cm]. Normalno na kružnu površinu prolaze linije sile magnetskog polja TV signala, a iznos magnetske indukcije se menja brzinom od $\Delta B/\Delta t$ = 0,16 [T/s]. Kolika je elek-tromotorna sila koja se indukuje na krajevima antene?

Rešenje:

Iznos indukovane elektromotorne sile, (napona između tačaka 1 i 2 na krajevima provodnika), jednak je brzini promene fluksa magnetskog polja, čije linije sile prolaze kroz datu površinu S:

$$|\varepsilon| = \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$



Budući da su linije sile magnetskog polja normalne na površinu S, magnetski fluks je jednak umnošku iznosa površine S i iznosa magnetske indukcije, B:

$$\Phi = SB\ .$$

S obzirom na to da je površina oivičena kružnim provodnikom stalna, promenu fluksa može da izazove samo promena magnetske indukcije. Prema tome, brzina promene fluksa je:

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = S\frac{\Delta B}{\Delta t}\ ,$$

gde je $\Delta B/\Delta t$ brzina promene magnetske indukcije i iznosi 0,16 [T/s]. Izraz za indukovanu elektromotornu silu je u tom slučaju:

$$|\varepsilon| = S\frac{\Delta B}{\Delta t}\ .$$

Prečnik kruga je 11 [cm], pa je površina

$$S = (0,11/2)^2\,\pi[\mathrm{m^2}] = 0,0095\ [\mathrm{m^2}]\ .$$

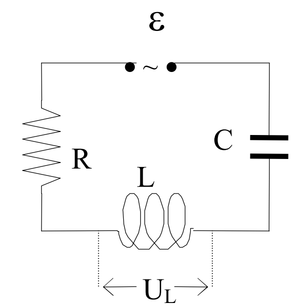
Iznos indukovane elektromotorne sile je:

$$\varepsilon = 0,0095\ [\mathrm{m^2}]\cdot 0,16\ [\mathrm{Ts^{-1}}] = 0,00152\ [\mathrm{V}] = 1,52\ [\mathrm{mV}]\ .$$

3.15. Može li amplituda napona na solenoidu vezanom serijski sa otpornikom i kondenzatorom u kolo naizmenične struje (RLC - kolo), da bude veća od amplitude elektromotorne sile izvora? Odgovor proveriti na sledećem primeru serijskog RLC - kola: ε = 10 [V], R = 10 [Ω], L = 1,0 [H] i C = 1,0 [μF]. Izračunaj vrednost amplitude napona na solenoidu, za kolo u rezonanciji.

Rešenje:

Na slici je prikazano tipično serijsko RLC kolo. U ovakvom kolu je moguće da amplituda napona U_L, na solenoidu induktivnosti L, bude veća od amplitude elektromotorne sile izvora ε.



Amplituda jačine struje u RLC kolu data je izrazom:

$$I_0 = \frac{\varepsilon}{Z} \text{ , gde je } Z = \sqrt{R^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \text{ ,}$$

impedanca kola. Ako je induktivna otpornost Lω jednaka kapacitivnoj otpornosti 1/(Cω), kolo koje je u *rezonanciji* i u tom slučaju je amplituda jačine struje najveća, I_{0max}. Najveća amlituda je jednaka:

$$I_{0\max} = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{10[\text{V}]}{10[\Omega]} = 1 \text{ [A] ,}$$

jer je Lω = 1/(Cω) i prema tome, $Z = R$. Kružna učestanost kola u rezonanciji može da se izračuna uvrštavanjem zadatih vrednosti L = 1,0 [H] i C = 1,0 [μF] u relaciju:

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{1[\text{H}]\cdot 10^{-6}[\text{F}]}} = 10^3 \text{ [rad/s] .}$$

Amplituda napona na solenoidu data je Omovim zakonom:

$$U_L = I_{0max} \cdot L\omega = 1[\text{A}] \cdot 1[\text{H}] \cdot 10^3 \text{ [rad/s]} = 1000 \text{ [V]}$$

3.4 Pitanja

3.16. Kako može da se izrazi jedinica za električnu konstantu vakuuma, pomoću osnovnih i izvedenih jedinica Međunarodnog sistema jedinica (SI) ?

3.17. Koliko puta treba da se poveća rastojanje između dva tačkasta naelektrisanja, da bi se sila kojom deluju jedno na drugo, smanjila deset puta?

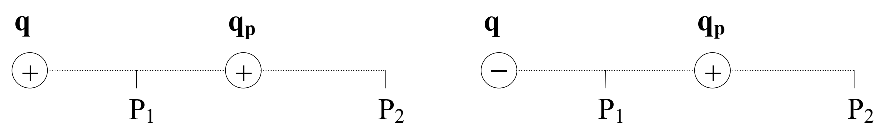
3.18. Dva mala tela naelektrisana jednakom količinom naelektrisanja, nalaze se u vazduhu. Kojim se, od niže navedenih postupaka, najviše smanjuje intenzitet Kulonove sile među njima:

a) smanjenjem količine naelektrisanja svakog od tela 9 puta,

b) povećanjem rastojanja izmeću tela, 9 puta,

v) premeštanjem tela bez promene naelektrisanja i bez promene rastojanja među njima, iz vazduha u vodu?
Relativna dielektrična konstanta vode je $\varepsilon_r = 81$.

3.19. Koji je od položaja, P_1 ili P_2, položaj veće potencijalne energije probnog naelektrisanja q_p, u polju naelektrisanja q: a) u slučaju prikazanom na shemi 1, b) u slučaju prikazanom na shemi 2?



shema 1 shema 2

3.20. Koja je relacija, između jedinica elektrostatičkih veličina, tačna:

a) $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]=\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}^3}\right]$, b) $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right]=\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{C}}\right]$ v) $\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{C}}\right]=\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$?

3.21. Koliku kinetičku energiju ima elektron koji se kreće u homogenom električnom polju, potencijalne razlike 1 [V]?

3.22. Dva kondenzatora, A i B, sastoje se od paralelnih ravnih ploča, površina oblika kvadrata. Dužina stranica ploča kondenzatora A je 10 [cm], a dužina stranica ploča konde-nzatora B je 9 [cm]. Rastojanje između ploča kondenzatora A je 5 [mm], a rastojanje između ploča kondenzatora B je 3 [mm]. Koji kondenzator ima veću kapacitivnost?

3.23. Kolika je kapacitivnost kondenzatora A i B iz zadatka 3.22, ako je relativna dielektrična konstanta dielektrika koji se nalazi između ploča i jednog i drugog konedenzatora, $\varepsilon_r = 6$? Električna konstanta vakuuma je $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ $[\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}]$.

3.24. Kolika je ekvivalentna kapacitivnost a) paralelne veze, b) redne veze, kondenzatora A i B iz zadatka 3.22?

3.25. Kolika bi bila kapacitivnost usamljenog sfernog tela, koje bi imalo poluprečnik jednak poluprečniku Zemlje, $R = 6370$ km?

3.26. Kako može da se izrazi jedinica količine naelektrisanja [C], (kulon), pomoću osnovnih jedinica Međunarodnog sistema (SI), za jačinu struje i za vreme?

3.27. Kako može da se izrazi jedinica za napon [V], volt, pomoću osnovnih jedinica Međunarodnog sistema (SI) za jačinu struje i vreme i izvedene jedinice za energiju ?

3.28. Pomoću kojih osnovnih jedinica Međunarodnog sistema (SI), može da se izrazi jedinica električne otpornosti, 1 [Ω]?

3.29. Koliki je odnos otpornosti dva provodnika od istog metala i iste mase, ako se prečnici njihovih poprečnih preseka odnose kao 1:2?

3.30. Koja je jedinica a) za specifičnu električnu otpornost, b) za specifičnu električnu provodljivost, u Međunarodnom sistemu jedinica, (SI)?

3.31. Koji je najveći broj kombinacija kojima se dobijaju različite ekvivalentne otpornosti vezivanjem tri otpornika, od kojih su dva iste otpornosti?

3.32. Koliku otpornost treba da ima otpornik kojim bi se u delu strujnog kola zamenila dva paralelno vezana otpornika od po 1 [Ω], da bi pad napona između priključaka otpornika ostao isti?

3.33. U kolu jednosmerne struje, na izvor elektromotorne sile od 12 [V] i unutrašnje otpornosti r = 0,1 [Ω] paralelno su vezana dva otpornika od po 1 [Ω], (kao u predhodnom zadatku). Kolika je jačina struje koja protiče granama koje sadrže otpornike?

3.34. Koliko [J] iznosi 1 [kWh]?

3.35. Kolika je snaga potrošača koji za dvadeset minuta proticanja struje utroši 1[kWh] električne energije?

3.36. Pomoću kojih osnovnih jedinica Međunarodnog sistema (SI), može da se izrazi jedinica za magnetsku indukciju 1[T], tesla?

3.37. Koji od načina izražavanja jedinice magnetskog toka (fluksa), vebera [NJb],pomoću jedinica Međunarodnog sistema (SI), nisu tačni?

a) $[Wb]=[T\cdot m^{-2}]$ b) $[Wb]=[V\cdot s]$ v) $[Wb]=[T\cdot m^{2}]$ g) $[Wb]=[T\cdot A\ /m]$

3.38. Kako je magnetska indukcija povezana sa jačinom magnetskog polja?

3.39. Sila kojom dva paralelna dugačka provodnika zanemarljivog poprečnog preseka, smeštena i vakumu (vazduhu), na međusobnom rastojanju od jednog metra, deluju jedan na drugi, je jednaka $2\cdot10^{-7}$[N] po metru dužine provodnika. Provodnicima teče struja iste jačine. Kolika je jačina te struje?

3.40. Kolika treba da je frekvencija naizmenične struje koja teče kalemom koeficijenta samoindukcije L = 20 [mH], da bi induktivna otpornost bila 6,28 [Ω]?

3.41. U kolo naizmenične struje frekvencije 50 [Hz], uključen je kalem koeficijenta samoindukcije L = 0,1 [H] i kondenzator. Koliki je kapacitivnost kondenzatora ako je impedancija kola minimalna?

3.42. U oscilatornom kolu koje sadrži samo kalem i kondenzator, promena električne u magnetsku energiju dešava se u intervalu od 0.005[s].
a) Koliki je period oscilovanja kola?
b) Kolika je frekvencija kola?
v) Koliko ukupno protekne vremena između dva uzastopna sta-nja maksimalne električne energije kola?

3.43. Kako može da se izračuna brzina prostiranja elektromagnetskih talasa u vakuumu? Električna konstanta vakuuma je $\varepsilon_o = 8{,}85\cdot10^{-12}$ [$C^2/(Nm^2)$], a magnetska permeabilnost vakuuma je $\mu_o = 4\pi\cdot10^{-7}$ [H/m].

3.44. Ravanski elektromagnetski talas ima maksimalnu vrednost električnog polja E = $4{,}8\cdot10^{-4}$ [V/m]. Kolika je maksima-lna magnetska indukcija?

3.45. Prijemnik radio talasa radi u opsegu učestanosti 5[MHz] - 20[MHz]. Kome opsegu talasnih dužina odgovara taj opseg učestanosti?

3.5 Odgovori

3.16. $\left[\dfrac{C^2\cdot s^2}{kg\cdot m^3}\right]$ i $\left[\dfrac{C^2}{N\cdot m^2}\right]$
3.17. približno 3,2 puta
3.18. U sva tri slučaja intenzitet Kulonove sile se smanjuje podjednako
3.19. a) položaj P_1, b) položaj P_2
3.20. v)
3.21. $E_K = e\cdot U = 1{,}6\cdot10^{-19}$ [C]·1 [V] = $1{,}6\cdot10^{-19}$ [J]
3.22. kondenzator B
3.23. $C_A \approx 106$ [pF], $C_B \approx 143$ [pF]
3.24. a) 249 [pF], b) 61 [pF]
3.25. $C \approx 0{,}7$ [mF]
3.26. [A·s]
3.27. $\left[\dfrac{J}{As}\right]$

3.28. $\left[\mathrm{m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}}\right]$

3.29. 16

3.30. a) [Ωm]   b) $[\Omega\mathrm{m}]^{-1}$

3.31. 6

3.32. 0,5 [Ω]

3.33. 10 [A]

3.34. 3600 [kJ]

3.35. 3000 [NJ]

3.36. $[\mathrm{T}] = \left[\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{s^2 A}}\right]$

3.37. a) i g)

3.38. $B = \mu \cdot H$, μ - magnetska permeabilnost sredine

3.39. 1[A]

3.40. 50 [Hz]

3.41. 101,4 [μF]

3.42. a) 0,02[s]   b) 50[Hz]   v) 0,01[s]

3.43. $c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \cdot \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8$ [m/s]

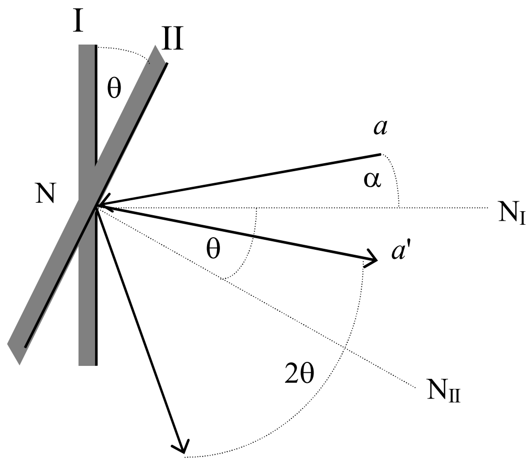
3.44. $B_{max} = \frac{E_{\max}}{c} = 1{,}6 \cdot 10^{-12}$[T]

3.45. 60[m] - 15[m]

4.OPTIKA

4.1 Geometrijska optika

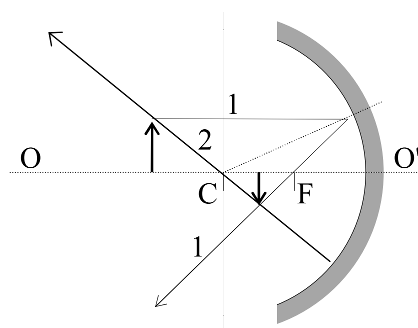
4.1. Pokaži konstrukcijom da se odbijeni zrak zakrene za ugao 2θ, ako se ravno ogledalo na koje zrak pada, zakrene za ugao θ.
Rešenje:



Pri konstrukciji treba uzeti u obzir zakon odbijanja svetlosti, po kome je ugao upada jednak uglu odbijanja, a upadni zrak, odbijeni zrak i normala na površinu ogledala, leže u istoj ravni. Ugao upada zraka a na ogledalo u položaju I je označen sa α. Ugao zakretanja ogledala iz položaja I u položaj II je θ. Ugao θ zaklapaju takođe normala NN_I na ogledalo u položaju I, i normala NN_{II} na ogledalo u položaju II. Veličina ugla koji zaklapaju zrak *a*' odbijen od ogledala u položaju I i zrak *a*'' odbijen od ogledala u položaju II jednaka je:

$$(\alpha + \theta) + (\theta - \alpha) = 2\theta .$$

4.2. Predmet se nalazi na udaljenosti jednakoj tri žižne daljine, od konkavnog sfernog ogledala. Poluprečnik zakrivljenosti konkavne površine je 40 [cm]. Konstruiši lik pomoću karakterističnih zraka. Kolika je udaljenost lika i kakav je lik?
Rešenje:



Jednačina konkavnog sfernog ogledala glasi :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{l} = \frac{1}{f} ,$$

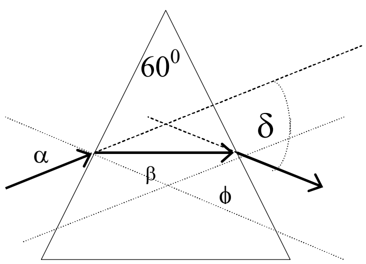
gde su *p* i *l* udaljenost predmeta odnosno lika od ogledala, duž centralne ose OO', a *f* je žižna daljina ogledala.
Relacija između radijusa zakrivljenosti sferne površine ogledala i žižne daljine je: $R = 2f$.

Uvrštavanjem zadatih vredosti se dobija: f = 20 [cm], $l = \frac{3}{2} f$, dakle l = 30 [cm].

Konstrukcija lika je izvedena pomoću dva od četiri karakteristična zraka. Zrak 1 je pre odbijanja od ogledala paralelan centralnoj osi, a nakon odbijanja prolazi kroz žižu F. Zrak 2 pre odbijanja prolazi kroz centar sferne površine C i odbija se od ogledala u istom pravcu. Lik je realan, izvrnut i umanjen.

4.3. Zrak svetlosti iz vazduha pada na ravnostranu optičku prizmu pod uglom od 45^0, a prelomljeni zrak izlazi iz prizme pod istim tim uglom. Koliki je ugao skretanja? Koliki je indeks prelamanja prizme?

Rešenje:



Ugao skretanja δ je ugao koji zaklapaju pravac upadnog zraka i zraka koji izlazi iz prizme. Ugao prizme je $\phi = 60^0$ stepeni, a toliki je i ugao ϕ između normala na površine prizme (uglovi čiji su kraci međusobno normalni). Zrak upada pod uglom α i prelama se pod uglom β, sa pravcem kretanja paralelnim osnovici prizme. Ugao ϕ je spoljašnji ugao za trougao čija su dva ugla jednaka β, pa je $\phi = 2\beta$, odnosno, $\beta = \phi/2$. Ugao δ je spoljašnji ugao za trougao čija su dva ugla jednaka $\alpha - \beta$, pa vredi: $\delta = 2(\alpha - \beta)$, ili $\delta = 2(\alpha - \phi/2)$. Budući da je $\alpha = 45^0$, a $\phi = 60^0$, $\delta = 30^0$. To je dakle, minimalni ugao skretanja. Prema zakonu prelamanja svetlosti

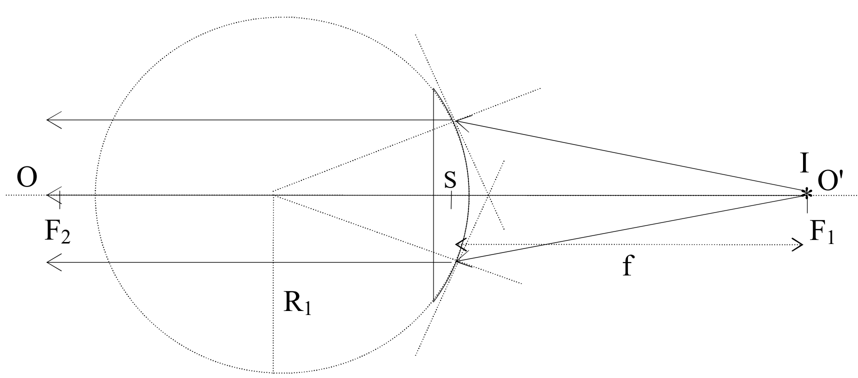
$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n_2}{n_1} \ ,$$

gde je n_1 apsolutni indeks prelamanja sredine iz koje zrak upada na graničnu površinu sredina, a n_2 je apsolutni indeks prelamanja sredine kroz koju se zrak prostire nakon prelamanja. Sredina iz koje zrak pada na prizmu je vazduh, pa je $n_1 = 1$. Indeks prelamanja materijala od koga je načinjena prizma je n_2.

$$n_2 = \frac{\sin 45^0}{\sin 30^0} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = 1,41 \ .$$

4.4. Tanko plankonveksno sočivo napravljeno od stakla indeksa prelamanja $n = 1,5$, okruženo je vazduhom. Radijus zakrivljenosti konveksne površine je 20 [cm]. Kolika je žižna daljina sočiva? Kolika je optička moć sočiva? Ako se predmet nalazi na centralnoj osi sočiva, na udaljenosti 40 [cm] od sočiva, gde se nalazi lik predmeta?

Rešenje:



Tankim sočivom smatra se ono, čija je najveća debljina znatno manja od poluprečnika zakrivljenosti površina. U tom slučaju, udaljenost žiža, udaljenost predmeta i udaljenost lika, se odmeravaju duž centralne ose (OO') od sredine sočiva (S), umesto od površina sočiva, pri čemu je greška zanemariva. Konveksna površina sočiva prikazanog na slici pripada površini zamišljene sfere čiji je poluprečnika R_1 = 20 [cm]. Druga površina je ravna, pa je poluprečnik zakrivljenosti R_2 = ∞. Jednačina za izračunavanje žižne daljine sočiva f, glasi:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) .$$

Uvrštavanjem zadatih vrednosti dobija se:

$$\frac{1}{f} = (1{,}5-1)\cdot\frac{1}{20} \text{ [cm]}^{-1}\text{, odakle je: f = 40 [cm] .}$$

Optička moć sočiva definiše se kao recipročna vrednost žižne daljine izražene u metrima. Jedinica za optičku moć je *dioptrija*. Budući da je žižna daljina f = 0,4 [m], optička moć sočiva je 2,5 dioptrija. Prema zadatku, predmet (izvor svetlosti I), nalazi se na udaljenosti od sočiva koja je jednaka žižnoj daljini. Jednačina tankog sočiva glasi:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{l},$$

gde je p = 40 [cm] udaljenost predmeta od sočiva, a l, udaljenost lika od sočiva. Uvrštavanjem vrednosti $f = p$ = 40 [cm], u jednačinu, dobija se:

$$\frac{1}{l} = 0\text{, odakle je } l = \infty.$$

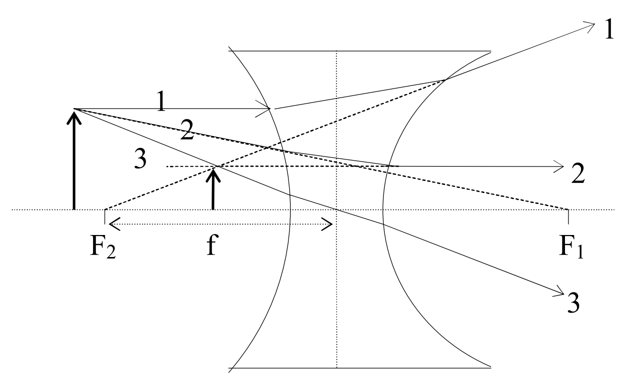
Ovaj rezultat potvrđuje i konstrukcija prelamanja na sočivu, kako je prikazano na slici. Zraci svetlosti koji polaze iz žiže, nakon prelamanja na sočivu su paralelni centralnoj osi. Ti zraci se ne seku, što znači da se lik predmeta nalazi u beskonačnosti.

4.5. Predmet se nalazi sa leve strane tankog rasipnog sočiva, na udaljenosti 52 [cm] od sredine sočiva. Radijus zakrivljenosti leve konkavne površine je R_1 = 60 [cm], a desne konkavne površine, R_2 = 40 [cm]. Indeks prelamanja stakla od koga je napravljeno sočivo je n = 1,5. Kolika je udaljenost lika od sredine sočiva? Kakav lik daje ovo sočivo? Konstruiši lik predmeta.

Rešenje:

Jednačina za izračunavanje žižne daljine rasipnog sočiva glasi:

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(-\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) .$$



Radijusi zakrivljenih konkavnih površina po definiciji imaju negativan predznak, pa će i žižna daljina ovog sočiva biti negativna veličina:

$$\frac{1}{\mathrm{f}} = (1{,}5 - 1)\left(-\frac{1}{60} - \frac{1}{40}\right) = -\frac{1}{48}\ [\mathrm{cm}]^{-1},$$

odakle je f = - 48 [cm]. Iz jednačine tankog sočiva dobija se udaljenost lika:

$$l = -\frac{pf}{p+f} \approx 25\ [\mathrm{cm}].$$

Lik se konstruiše pomoću dva od tri karakteristična zraka. Zrak 1, koji je pre prelamanja bio paralelan centralnoj osi, nakon prelamanja ima pravac čiji produžetak prolazi kroz žižu F_1. Zrak 2 pre prelamanja ima pravac čiji produžetak prolazi kroz žižu F_2, a nakon prelamanja je paralelan centralnoj osi. Zrak 3 prolazi kroz sredinu sočiva gotovo bez prelamanja. Prelomljeni zraci se ne seku, pa se lik predmeta nalazi pomoću tačke u kojoj se seku produžeci tih zraka. Prema tome, lik je *virtuelan* (imaginaran), uspravan i umanjen.

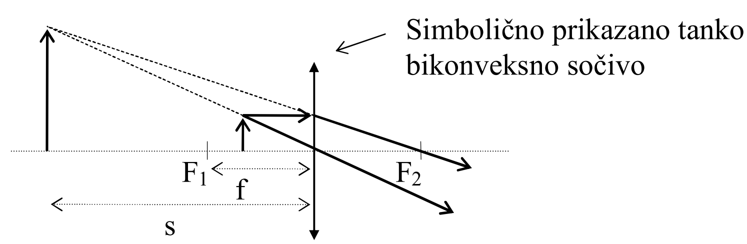
4.6. Osoba normalne daljine jasnog vida pomoću lupe žižne daljine f = 10 [cm], vidi uvećan lik predmeta. Kolika bi trebalo da bude žižna daljina lupe, pomoću koje bi osoba daljine jasnog vida s = 30 [cm], videla lik istog predmeta sa istim uvećanjem? Konstruiši lik predmeta dobijen pomoću lupe.

Rešenje:

Lupa je tanko bikonveksno sočivo koje se stavlja neposredno ispred oka, tako da se dobija uvećan imaginarni lik predmeta na udaljenosti jasnog vida. To se postiže ako se predmet postavi između sočiva i žiže, u blizini žiže. Uvećanje lupe je jednako:

$$u = \frac{s}{f} + 1,$$

gde je f žižna daljina, a s daljina jasnog vida. Osoba normalne daljine jasnog vida s = 25 [cm], pomoću lupe žižne daljine f = 10 [cm], vidi 3,5 puta uvećan lik predmeta. Prema tome, osobi daljine jasnog vida s = 30 [cm], potrebna je lupa žižne daljine f = 12 [cm], da bi isti predmet videla uvećan 3,5 puta.

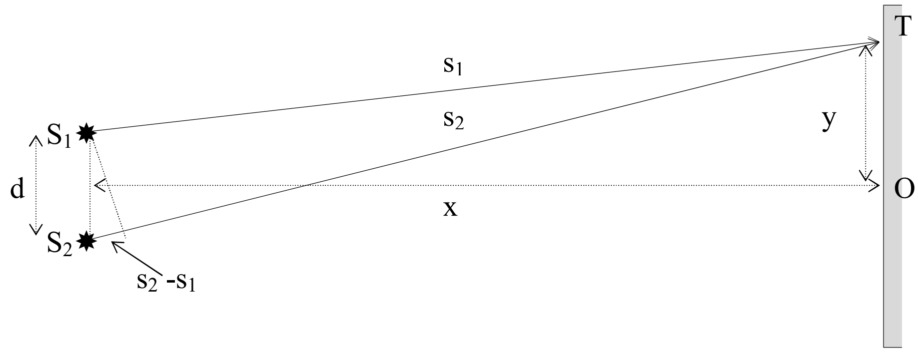


4.2 Talasna optika

4.7 Dva koherentna svetlosna izvora, S_1 i S_2, nalaze se na međusobnom rastojanju od d = 200 [μm]. Paralelno ravni u kojoj leže izvori, postavljen je zastor. Normalna udaljenost od sredine rastojanja izvora do zastora, je x = 7,5 [m]. Kolika je geometrijska razlika puteva zraka iz izvora S_1 i S_2 do tačke na zastoru, udaljene 3 [cm] od tačke u koju pada normala, spuštena iz sredine rastojanja izvora, na zastor?

Rešenje:

Put zraka iz izvora S_1 do tačke T je $s_1 = \overline{\mathrm{S_1T}}$. Put zraka iz izvora S_2 do tačke T je $s_2 = \overline{\mathrm{S_2T}}$. Pomoću slike i primenom Pitagorine teoreme, dobija se:



$$s_1^2 = x^2 + (y - \frac{d}{2})^2 ,\ s_2^2 = x^2 + (y + \frac{d}{2})^2 .$$

Budući da je: $s_2^2 - s_1^2 = (s_2 - s_1)(s_2 + s_1)$, razlika puteva je jednaka:

$$s_2 - s_1 = \frac{s_2^2 - s_1^2}{s_s + s_1} .$$

Za $x >> d$, kao što je slučaj u ovom zadatku, sa malom greškom može da se zameni $s_2 + s_1 \approx x$, pa je razlika puteva jednaka:

$$s_2 - s_1 = \frac{dy}{x} = \frac{2 \cdot 10^{-4}[\mathrm{m}] \cdot 3 \cdot 10^{-2}[\mathrm{m}]}{7{,}5[\mathrm{m}]} = 0{,}8[\mu m] .$$

4.8. U primeru čija je geometrija data slikom iz predhodnog zadatka, izvori S_1 i S_2 su izvori bele svetlosti, smešteni u vazduhu. Za koju će talasnu dužinu iz spektra vidljive svetlosti, na rastojanju $\overline{OT}$, nastati svetla interferenciona pruga i koga reda?

Rešenje:

Predpostavimo da su izvori S_1i S_2 uske pukotine na koje pada bela svetlost i kroz koje zraci svetlosti padaju na zastor. Da bi nastala svetla pruga na zadatoj udaljenosti od sredine interferencione slike, treba da važi:

$$s_2 - s_1 = z\lambda,$$

gde je z redni broj pruge, (z = 0, 1, 2, 3,...) a λ, talasna dužina svetlosti. Redni broj z = 0, odgovara centralnoj svetloj prugi, koja nije razložena na talasne dužine spektra. Prema predhodnom zadatku je $s_2 - s_1 = 0{,}8$ [μm]. Za z > 0 talasna dužina je jednaka:

$$\lambda = \frac{s_2 - s_1}{z} = \frac{0{,}8 \cdot 10^{-6}[\mathrm{m}]}{z} .$$

Rednom broju z = 1 odgovara talasna dužina λ = 800 [nm], koja ne pripada vidljivom, već infracrvenom delu spektra i nije komponenta bele svetlosti. Rednom broju z = 2 odgovara talasna dužina λ = 400 [nm], što je talasna dužina ljubičaste svetlosti vidljivog spektra. Rednom broju z = 3, odgovara talasna dužina λ = 267 [nm], koja ne pripada vidljivom, već ultraljubičastom delu spektra i nije komponenta bele svetlosti. Sa povećanjem z iznad 3, pripadne talasne dužine su sve kraće, dakle pripadaju ultraljubičastom delu spektra. Prema tome, na udaljenosti $\overline{OT}$ = 3 [cm], videće se svetla pruga drugog reda ljubičaste boje.

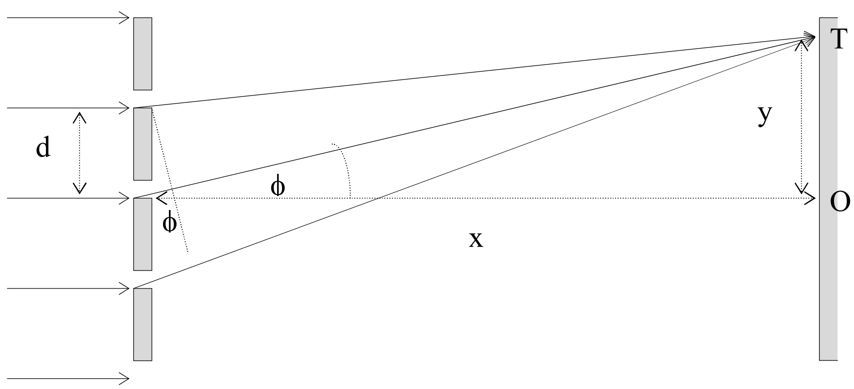
4.9. Na kojoj udaljenosti od optičke rešetke treba postaviti zastor tako da bude paralelan njenoj površini, da bi monohromatska svetlost talasne dužine λ= 500 [nm], dala svetlu prugu drugog reda na rastojanju od 12 [cm] od centralne interferencione pruge? Konstanta rešetke je 1/80 [mm].

Rešenje:

Optička rešetka sadrži niz gusto raspoređenih uskih pukotina. U zadatku je broj pukotina po milimetru 80, što znači da je rastojanje između dve susedne pukotine d = 1/80 [mm], (konstanta rešetke). Ako se kroz pukotine propusti svetlost, one postaju koherentni izvori iz kojih zraci na zastoru daju interferencionu sliku. Razlika puteva zraka iz dva susedna izvora $\delta = s_2 - s_1$, može da se izrazi pomoću ugla ϕ i rastojanja d:

$$\delta = \mathrm{d} \sin\phi.$$

Iz slike se vidi da je $\tan\phi = \frac{y}{x}$. Za $x >> d$ i $x >> y$ ugao ϕ je mali, pa može da se smatra da je:



$\tan\phi \approx \phi$ i $\sin\phi \approx \phi$. Da bi na zastoru nastala svetla interferenciona pruga drugog reda, treba da bude zadovoljen uslov:

$$\delta = 2\lambda = \mathrm{d}\phi,$$

ili uzimajući u obzir da je $\phi \approx y/x$, $2\lambda = d\frac{y}{x}$, odakle je

$$x = \frac{d \cdot y}{2\lambda} = \frac{(1/80)\cdot 10^{-3}[\mathrm{m}]\cdot 12\cdot 10^{-2}[\mathrm{m}]}{2\cdot 500\cdot 10^{-9}[\mathrm{m}]} = 1{,}5\ [\mathrm{m}].$$

4.10. Za koliko se promeni talasna dužina svetlosti frekvencije $\nu = 4\cdot 10^{14}$ [Hz], pri prelasku svetlosnog talasa iz stakla u vazduh? Indeks prelamanja stakla je n = 1,5. Brzina svetlosti u vazduhu je $c \approx 3\cdot 10^8$ [m/s].

Rešenje:

Indeks prelamanja svetlosti neke sredine je odnos brzine prostiranja svetlosti u vazduhu (vakuumu) i brzine prostiranja svetlosti u toj sredini:

$$n = \frac{c}{v}.$$

Brzina prostiranja svetlosti u staklu je:

$$v = \frac{c}{n} = \frac{3\cdot 10^8[\mathrm{m/s}]}{1{,}5} = 2\cdot 10^8\ [\mathrm{m/s}]\ .$$

Talasna dužina svetlosti frekvencije $4\cdot 10^{14}$ [Hz] u vazduhu je:

$$\lambda_0 = \frac{c}{\nu} = \frac{3\cdot 10^8[\text{m/s}]}{4\cdot 10^{14}[\text{Hz}]} = 750\ [\text{nm}].$$

Talasna dužina svetlosti frekvencije $4\cdot 10^{14}$ [Hz] u staklu je:

$$\lambda = \frac{v}{\nu} = \frac{2\cdot 10^8[\text{m/s}]}{4\cdot 10^{14}[\text{Hz}]} = 500\ [\text{nm}].$$

Talasna dužina se pri prelasku iz stakla u vazduh promeni od 500 [nm] (plavozelene), do 750 [nm] (crvene), dakle za 250 [nm].

4.3 Korpuskularna teorija svetlosti

4.11. Kolika je razlika u energiji fotona ljubičaste svetlosti λ_v =390 [nm] i fotona crvene svetlosti λ_r = 720 [nm]?

Rešenje:

Energija fotona je jednaka E = hν, gde je h = $6{,}62\cdot 10^{-34}$ [Js], Plankova konstanta, a ν frekvencija zračenja. Razlika energije fotona ljubičaste i crvene svetlosti je jednaka:

$$E_v - E_r = h\,(\nu_v - \nu_r),$$

ili s obzirom na relaciju ν = c/λ,

$$E_v - E_r = hc\cdot\left(\frac{1}{\lambda_v} - \frac{1}{\lambda_r}\right).$$

Uvrštavanjem zadatih vredosti dobija se:

$$E_v - E_r = 6{,}62\cdot 10^{-34}[\text{Js}]\cdot 3\cdot 10^8[\text{m/s}]\cdot 10^9\left(\frac{1}{390} - \frac{1}{720}\right)[\text{m}]^{-1} = 2{,}3\cdot 10^{-19}\ [\text{J}].$$

4.12. Koliko puta je energija fotona crvene svetlosti talasne dužine λ_r = 700 [nm], a) veća od energije infracrvenog zračenja talasne dužine λ_{ir} = 1000 [nm], b) manja od energije x - zračenja, talasne dužine λ_x = 0,1 [nm]?

Rešenje:

a) $\dfrac{h\frac{c}{\lambda_r}}{h\frac{c}{\lambda_{ir}}} = \dfrac{1000[\text{nm}]}{700[\text{nm}]} = 1{,}43$ puta; b) $\dfrac{h\frac{c}{\lambda_x}}{h\frac{c}{\lambda_{ir}}} = \dfrac{700[\text{nm}]}{0{,}1[\text{nm}]} = 7000$ puta.

4.13. Snop monohromatske svetlosti talasne dužine λ=500 [nm] ima energiju $2\cdot 10^{-3}$ [J]. Koliko fotona sadrži snop?

Rešenje:

Ukupna energija snopa jednaka je NE, gde je N, broj fotona, a $E = h\nu$, energija pojedinog fotona.

$$NE = Nh\frac{c}{\lambda},$$

odakle se uvrštavanjem zadatih vrednosti dobija:

$$N = \frac{2\cdot 10^{-3}[\text{J}]\cdot 500\cdot 10^{-9}[\text{m}]}{6{,}62\cdot 10^{-34}[\text{Js}]\cdot 3\cdot 10^8[\text{m/s}]} \approx 5\cdot 10^{15}\ \text{fotona}.$$

4.14. Natrijumova sijalica snage P = 100 [NJ], koja se nalazi u sfernom staklenom balonu, emituje fotone talasne dužine λ= 590 [nm]. Koliko fotona u jedinici vremena padne na stakleni balon?

Rešenje:

Energija fotona je jednaka:

$$E = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}[\text{Js}]\cdot 3\cdot 10^{8}[\text{m/s}]}{590\cdot 10^{-9}[\text{m}]} = 3{,}37\cdot 10^{-19}\ [\text{J}].$$

Snaga sijalice je $P = \frac{NE}{t}$, gde je NE ukupna enerija zračenja N fotona. Broj fotona emitovan u jedinici vremena je:

$$\frac{N}{t} = \frac{P}{E} = \frac{10^{2}[\text{J/s}]}{3.37\cdot 10^{-19}[\text{J}]} \approx 3\cdot 10^{20}\ \text{fotona / [s]}.$$

4.15. Koliko fotona, koje emituje helijum - neonski laser talasne dužine λ= 633 [nm], pada u sekundi i po jedinici površine detektora, ako je poprečni presek snopa fotona S = 38,5 [mm^2], a snaga lasera P = 5 [mW]?

Rešenje:

Energija fotona je:

$$E = h\frac{c}{\lambda} = \frac{6{,}62\cdot 10^{-34}[\text{Js}]\cdot 3\cdot 10^{8}[\text{m/s}]}{633\cdot 10^{-9}[\text{m}]} = 3{,}1\cdot 10^{-19}\ [\text{J}].$$

Ukupna energija laserskog snopa je NE, gde je N broj emitovanih fotona. Snaga lasera je:

$$P = \frac{NE}{t},$$

gde je $\frac{N}{t}$ broj fotona emitovanih u sekundi,

$$\frac{N}{t} = \frac{P}{E} = \frac{5\cdot 10^{-3}[\text{W}]}{3{,}1\cdot 10^{-19}[\text{J}]} = 1{,}6\cdot 10^{16}\ \text{fotona / [s]}.$$

U sekundi, na jedinicu površine detektora koji je postavljen normalno na snop, pada:

$$\frac{N}{t\cdot S} = \frac{1{,}6\cdot 10^{16}\,\frac{fotona}{[\text{s}]}}{38{,}5\cdot 10^{-6}[\text{m}^2]} = 4{,}2\cdot 10^{20}\ \frac{fotona}{[\text{s}][\text{m}^2]}$$

4.4 Pitanja

4.16. Koliki je indeks prelamanja sredine na koju iz vazduha pada zrak svetlosti pod upadnim uglom od 45^0, a prelama se tako da je ugao prelamanja 30^0?

4.17. Broj dioptrija tankog sabirnog sočiva je 4. Kolika je žižna daljina sočiva?

4.18. Broj dioptrija tankog sočiva je O_s = 2D, gde je O_s optička moć sočiva. Jedinica za optičku moć sočiva je dioptrija, [1D]=[m^{-1}]. Ako se predmet postavi na optičku osu na udaljenosti 50 [cm] od centra sočiva, na kojoj udaljenosti od centra sočiva se nalazi lik?

4.19. Žižna daljina sočiva je f = 0,5 [m]. Koliki je broj dioptrija sočiva?

4.20. Na planparalelnu staklenu ploču koja se nalazi u vazduhu, svetlosni zrak pada pod upadnim uglom od 45°. Pod kojim uglom prelamanja zrak izlazi iz ploče?

4.21. Koja se svetlost najviše prelama disperzijom bele svetlosti na staklenoj prizmi?

4.22. Koliko je rastojanje između dva izvora bele svetlosti, ako se na ekranu udaljenom 3,2 [m], ljubičasta (λ_v = 400 [nm]) i crvena (λ_r = 760 [nm]), svetla pruga prvog reda, nalaze na rastojanju od 8 [mm]?

4.23. Da li se menja energija fotona pri prelasku iz jedne u drugu optičku sredinu, različitog indeksa prelamanja od prve?

4.24. Kojoj oblasti spektra pripada zračenje fotona energije $2\cdot10^{-19}$ [J]? Plankova konstanta je h = $6,62\cdot10^{-34}$ [J s], a brzina svetlosti c = $3\cdot10^{8}$ [m/s].

4.25. Kolika je energija fotona iz snopa monohromatskog zračenja talasne dužine λ = 300 [nm] ? Brzina fotona je $c = 3\cdot10^{8}$ [m/s], a Plankova konstanta $6,62 \cdot 10^{-34}$ [J·s].

4.5 Odgovori

4.16. 1,41
4.17. 25 [cm]
4.18. ∞
4.19. 2[D]
4.20. 45°
4.21. ljubičasta
4.22. 0,144 [mm]
4.23. ne
4.24. infracrvenoj
4.25. $6,62\cdot10^{-19}$ [J]

5.UVOD U ATOMSKU I NUKLEARNU FIZIKU

5.1 Borov model atoma. Paulijev princip

5.1. Pomoću Borovog modela vodonikovog atoma, odredi poluprečnik orbite elektrona, ako je atom u najnižem energijskom stanju, i linijsku brzinu elektrona na toj orbiti.

Rešenje:

Uopšte, sila koja deluje između jezgra i elektrona je Kulonova sila:

$$F_C = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_e q_p}{r_n^2} \; .$$

U izrazu za Kulonovu silu, $q_e = z\cdot e = z\cdot(-1{,}602\cdot 10^{-19})$ [C] je ukupno naelektrisanje z elektrona koji se nalaze u orbitama oko jezgra, $q_p = z'\cdot 1{,}602\cdot 10^{-19}$ [C] je ukupno naelektrisanje z' protona koji se nalaze u jezgru, a r_n je poluprečnik orbite elektrona za koju je glavni kvantni broj jednak n.

Električna konstanta vakuuma je $\varepsilon_0 = 8{,}854\cdot 10^{-12}$ $[C^2N^{-1}m^{-2}]$. Negativan predznak ispred iznosa sile pokazuje da je sila privlačna. Budući da se radi o vodonikovom atomu koji se sastoji od jednog protona i jednog elektrona, $z = 1$, $z' = 1$. Atom je u najnižem energijskom stanju ako elektron kruži orbitom koja je najbliža jezgru atoma. Glavni kvantni broj te orbite je $n = 1$. Iznos Kulonove sile koja deluje između jezgra i elektrona za vodonikov atom u najnižem energijskom stanju je:

$$\left|F_C\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_1^2} \; .$$

Prema drugom Njutnovom zakonu, na elektron koji ravnomerno kruži oko jezgra orbitom poluprečnika r_1, deluje sila :

$$F = m_e\frac{v^2}{r_1} \; ,$$

gde je $m_e = 9{,}109\cdot 10^{-31}$ [kg], masa elektrona, a $\frac{v^2}{r_1}$, radijalno ubrzanje, koje proizilazi iz promene pravca i smera linijske brzine v. Izjednačavanjem $\left|F_C\right|$ i F, dobija se:

$$r_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{v^2 m_e} \; . \qquad (1)$$

Linijska brzina može da se odredi na osnovu I Borovog postulata, po kome je moment količine kretanja elektrona po orbiti glavnog kvantnog broja n, *kvantovan*:

$$r_n m_e v = n\cdot\frac{h}{2\pi} \; ,$$

$h = 6{,}626\cdot 10^{-34}$ [Js], je Plankova konstanta. Za brzinu elektrona na orbiti glavnog kvantnog broja n =1, važi:

$$v = \frac{h}{2\pi}\frac{1}{m_e r_1} \; . \qquad (2)$$

Jednačine (1) i (2) čine sistem sa dve nepoznate veličine, r_1 i v, pa se rešavanjem tog sistema dobija:

$$r_1 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}\ ,\ v = \frac{e^2}{2h\varepsilon_0}\ \text{, odakle je}$$

$$r_1 = \frac{h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2} = \frac{(6{,}62\cdot 10^{-34}[\mathrm{Js}])^2 8{,}85\cdot 10^{-12}[\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}]}{\pi\cdot 9{,}11\cdot 10^{-31}[\mathrm{kg}](1{,}6\cdot 10^{-19}[\mathrm{C}])^2} = 5{,}3\cdot 10^{-11}\ [\mathrm{m}].$$

$$v = \frac{(1{,}6\cdot 10^{-19}[C])^2}{2\cdot 6{,}62\cdot 10^{-34}[Js]\cdot 8{,}85\cdot 10^{-12}[C^2N^{-1}m^2]} = 2{,}18\cdot 10^6\ \ [\mathrm{m/s}].$$

5.2. Kolika je energija potrebna da se jonizuje atom vodonika, ako je u najnižem energijskom stanju (osnovnom stanju)?

Rešenje:

Sila koja elektronu mase m_e daje radijalno ubrzanje v^2/r_n na orbiti glavnog kvantnog broja n, jednaka je Kulonovoj sili:

$$m_e\frac{v^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n^2}\ .\ (1)$$

Potencijalna energija elektrona u polju Kulonove sile je jednaka: $E_p = F_C{\cdot}r$. Ako se elektron nalazi na orbiti glavnog kvantnog broja n, potencijalna energija je data izrazom:

$$E_p = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n}.\ (2)$$

Kinetička energija elektrona na orbiti je $E_K = \frac{1}{2}m_e v^2$, gde je v linijska brzina elektrona.

Iz jednačine (1) proizilazi:

$$E_K = \frac{1}{2}m_e v^2 = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n},\ (3)$$

ili $E_K = \frac{1}{2}\left|E_p\right|$. Ukupna energija elektrona na orbiti glavnog kvantnog broja n, jednaka je zbiru potencijalne energije (1) i kinetičke energije (2):

$$E = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n}\ .\ (4)$$

Prema I Borovom postulatu, po kome je moment količine kretanja elektrona po orbiti glavnog kvantnog broja n, kvantovan,

$$r_n m_e v = n\cdot\frac{h}{2\pi}\ ,$$

pa sledi da je:

$$m_e\frac{v^2}{r_n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_n^2}\ .$$

Uzimajući u obzir relaciju (1), poluprečnik orbite glavnog kvantnog broja n, može da se izrazi na sledeći način:

$$r_n = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}\ .$$

Uvrštavanjem r_n u relaciju (4), za ukupnu energiju se dobija:

$$E = -\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{e^2}{r_n} .$$

Energija elektrona na orbiti $n = 1$, jednaka je:

$$E = \frac{(1,6\cdot10^{-19}[\mathrm{C}])^4 9,11\cdot10^{-31}[\mathrm{kg}]}{8\cdot(8,85\cdot10^{-12}[\mathrm{C^2N^{-1}m^{-2}}])^2(6,62\cdot10^{-34}[\mathrm{Js}])^2} = 2,17\cdot10^{-18}\ [\mathrm{J}] .$$

Potencijalna energija elektrona koji se oslobodio privlačne sile jezgra, jednaka je nuli, pa je i ukupna energija jednaka nuli. Energija potrebna da bi elektron vodonikovog atoma iz najnižeg energijskog stanja ($n = 1$), prešao u slobodno stanje ($n = \propto$), jednaka je:

$$\Delta E = 0 - (-E_1) = 2,17\cdot10^{-18}\ [\mathrm{J}] = 13,6\ [\mathrm{eV}] .$$

5.3. Kolike su talasne dužine Balmerove serije spektralnih linija vodonika u području vidljive svetlosti?

Rešenje:

Prema II Borovom postulatu, atom zrači energiju samo pri prelasku elektrona iz višeg u niže energijsko stanje. Fotoni koje zrači atom imaju energiju od jednog *kvanta*: $h\nu$, gde je $h = 6,626\cdot10^{-34}$ [Js] Plankova konstanta, a ν frekvencija zračenja. Kvant izračene energije jednak je razlici energija početnog i konačnog stanja elektrona:

$$E_k - E_n = h\nu = -\frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{k^2} - \left(-\frac{e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2}\right),$$

gde je $k > n$. Balmerova serija linija vidljive svetlosti nastaje pri prelasku elektrona iz viših pobuđenih stanja (k = 7, 6, 5, 4, 3) u stanje energije kome odgovara n = 2. Frekvencije i pripadne talasne dužine spektralnih linija dobijaju se pomoću izraza:

$$h\nu = -\frac{e^2 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{n^2} - \left(-\frac{e^2 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2}\frac{1}{k^2}\right),$$

odnosno

$$\lambda = \frac{\mathrm{c}}{\nu} = \mathrm{c}\frac{8\varepsilon_0^2\mathrm{h}^3}{\mathrm{e}^4\mathrm{m_e}}\frac{\mathrm{n}^2\mathrm{k}^2}{\mathrm{k}^2-\mathrm{n}^2} = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\mathrm{n}^2\mathrm{k}^2}{\mathrm{k}^2-\mathrm{n}^2} ,$$

gde je $c = 3\cdot10^8$ [m/s], brzina svetlosti, a $R = 1,097\cdot10^7$ [1/m] Ridbergova konstanta.

Za $k = 7$, $\lambda = 397$ [nm], ljubičasta
$k = 6$, $\lambda = 410$ [nm], ljubičasto-plava
$k = 5$, $\lambda = 434$ [nm], plava
$k = 4$, $\lambda = 486$ [nm] plavo-zelena i
$k = 3$, $\lambda = 656$ [nm] crvena.

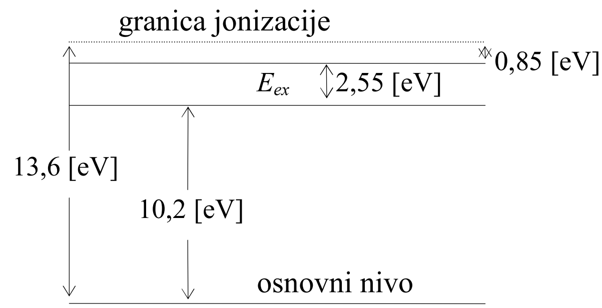
5.4. Atom vodonika nalazi se u pobuđenom energijskom stanju, iz koga može da se jonizuje apsorpcijom energije od 0,85 [eV]. Iz tog stanja atom prelazi u pobuđeno stanje niže energije E_{ex} i pri tome emituje foton frekvencije $\nu = 6,17\cdot10^{14}$ [Hz]. Kolika je razlika između energije E_{ex} i energije najnižeg energijskog nivoa (osnovnog stanja) atoma vodonika.

Rešenje:

Energija emitovanog fotona jednaka je:

$$h\nu = 6{,}626\cdot 10^{-34}\ [\mathrm{Js}]\cdot 6{,}17\cdot 10^{14}\ [\mathrm{Hz}] = 4{,}085\cdot 10^{-19}\ [\mathrm{J}] = 2{,}55\ [\mathrm{eV}].$$

Da bi atom bio jonizovan iz osnovnog stanja, potrebno je da apsorbuje energiju od 13,6 [eV]. Nivou sa koga se vrši prelaz elektrona odgovara energija (13,6 - 0,85) [eV]. Nivo na koji se vrši prelaz nalazi se 2,55 [eV] niže, odnosno 10,2 [eV] iznad osnovnog stanja. Dijagram energijskih stanja izgleda ovako:



5.5. Napiši konfiguraciju neona ($_{10}Ne$), uzimajući u obzir Paulijev princip popunjavanja energijskih stanja atoma.

Rešenje:

Prema Paulijevom principu dva ili više elektrona ne mogu da budu u energijskom stanju za koje su sva četiri kvantna broja jednaka. Kvantni brojevi koji definišu energiju elektrona su:

$n = 1, 2, 3,...$ - glavni kvantni broj (broj "ljuske");

$l = 0, 1, 2, ...(n-1)$ - orbitalni kvantni broj;

$m_l = 0, -1,0,1, -2,-1,0,1,2,...-l,-(l-1),..,0,...(l-1),l$ - magnetski orbitalni kvantni broj

$m_s = \pm\frac{1}{2}$ - kvantni broj spina.

Atom neona ima 10 elektrona koji su raspoređeni u orbitale na sledeći način:

$n=1$		$n=2$							
$l=0$		$l=0$		$l=1$					
$m_l=0$		$m_l=0$		$m_l=-1$		$m_l=0$		$m_l=1$	
1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2	1/2	-1/2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Orbitale za koje je $l = 0$, označavaju se sa "s" (sharp, oštar).

Orbitale za koje je $l = 1$, označavaju se sa "p" (principle, glavni).

Ljuska $n = 1$ sadrži dva s - elektrona : $(1s)^2$.

Ljuska $n = 2$ sadrži dva s - elektrona i šest p - elektrona: $(2s)^2(2p)^6$.

Konfiguracija neona je: $(1s)^2(2s)^2(2p)^6$.

5.2 Fizika atomskog jezgra i radioaktivnih pojava

5.6. Kolika je zapremina jezgra atoma zlata, $^{197}_{79}\mathrm{Au}$?
Rešenje:
Pod predpostavkom da jezgro atoma ima sferni oblik, zapremina je data obrascem:

$$V = \frac{4}{3}\pi r_n^3 ,$$

gde je r_n poluprečnik jezgra. Poluprečnik jezra atoma čiji je maseni broj jednak A, može da se odredi pomoću relacije:

$$r_n = r_0 \sqrt[3]{A} .$$

Veličina r_0 = 1,2·10^{-15} [m], jedinični nuklearni poluprečnik, predstavlja najmanju udaljenost na koju mogu da se približe nukleoni u jezgru. Zapremina jezgra zlata (A = 197), iznosi:

$$V = \frac{4}{3}\pi(1,2\cdot 10^{-15}[m])^3 \cdot 197 = 1425\cdot 10^{-45}\ [\mathrm{m}^3],$$

ili 1425 [fm^3]. (Jedan femptometar, [fm] = 10^{-15} [m]).

5.7. Kolika bi se energija oslobodila pri formiranju jezgra atoma helijuma $^4_2\mathrm{He}$, iz protona i neutrona? Kolika bi se energija oslobodila pri nastajanju jednog grama helijuma na ovaj način? Zadata je:
masa atoma helijuma m_{He} = 4,0026 [u],
masa protona m_p = 1,0073 [u],
masa neutrona m_n = 1,0087 [u] i
masa elektrona m_e = 0,00055 [u].
Rešenje:
Pri formranju jezgra iz nukleona, oslobađa se energija jednaka energiji veze. Prema Ajnštajnovoj relaciji, energija veze je jednaka:

$$\Delta E = \Delta m\ c^2,$$

gde je c = 2,99792·10^8 [m/s], brzina elektromagnetskih talasa, (brzina svetlosti), u vakuumu, a Δm, *defekt mase*. Defekt mase predstavlja razliku između ukupne mase nukleona i mase jezgra kao celine:

$$\Delta m = Zm_p + (A\text{-}Z)m_n - m_j .$$

U izrazu za defekt mase Z je redni broj atoma, A je maseni broj atoma, m_p je masa protona, m_n je masa neutrona i m_j je masa jezgra. Mase nukleona i elektrona date su u *atomskim jedinicama mase*: 1[u] = 1,661·10^{-27} [kg]. Za defekt mase od 1 [u], energija veze je jednaka:

$$\Delta E_u = (2{,}9979\cdot 10^8[\mathrm{m/s}])^2\cdot 1{,}661\cdot 10^{-27}[\mathrm{kg}] = 14{,}9\cdot 10^{-11}[\mathrm{J}] \approx 931\,[\mathrm{MeV}] ,$$

a za Δm [u]: $\Delta E = 931[\mathrm{MeV}][u]^{-1}\cdot \Delta m[u]$.
Masa jezgra helijuma je jednaka: m_j = m_{He} - 2m_e, pa je defekt mase pri formiranju jezgra helijuma:

$$\Delta m = 2\cdot 1{,}0073\ [u] + 2\cdot 1{,}0087\ [u] - (4{,}0026 - 2\cdot 0{,}00055)\ [u] = 0{,}0305\ [u] .$$

Energija veze koja bi se oslobodila pri formiranju jednog jezgra je jednaka :

$$\Delta E = 931[\mathrm{MeV}][u]^{-1}\cdot \Delta m[u]\,[\mathrm{MeV}].$$

Jedan gram helijuma sadrži $N = \frac{N_A}{4} = 1,51 \cdot 10^{23}$ jezgara, gde je N_A = $6,022 \cdot 10^{23}$ jezgara/mol, Avogadrov broj.
Formiranjem jezgara jednog grama helijuma, oslobodi se energija od
$43 \cdot 10^{23}$ [MeV] ≈ $69 \cdot 10^{10}$ [J] .

5.8. Bombardovanjem jezgara bora $^{11}_{5}\mathrm{B}$ protonima, dobijaju se jezgra berilijuma $^{8}_{4}\mathrm{Be}$. Koja još jezgra, pored jezgara berilijuma, nastaju pri ovoj reakciji? Kolika je enerija koja se oslobodi pri ovoj reakciji? Zadata je:
masa atoma bora m_B = 11,00930 [u],
masa atoma vodonika m_H = 1,00783 [u],
masa atoma berilijuma m_{Be} = 8,00531 [u] i
masa atoma helijuma m_{He} = 4,00260 [u].
Rešenje:
Reakcijom nastaju jezgra helijuma $^{4}_{2}\mathrm{He}$, (α čestice):

$$^{11}_{5}\mathrm{B} + ^{1}_{1}\mathrm{H} \rightarrow ^{8}_{4}\mathrm{Be} + ^{4}_{2}\mathrm{He}.$$

Defekt mase ove reakcije može da se izračuna pomoću masa atoma, jer se mase elektrona atoma koji ulaze u reakciju i elektrona atoma koji izlaze iz reakcije, poništavaju.

$$\Delta m = m_B + m_H - (m_{Be} + m_{He}) .$$

Uvrštavanjem zadatih vrednosti dobija se: Δm = 0,00922 [u].
Energija veze je: ΔE = 931,5 [MeV][u]$^{-1}$ 0,00922 [u] = 8,58 [MeV].

5.9. Uzorak ugljenisanog drveta od 5 [g], uzet sa ognjišta na arheološkom nalazištu, pokazuje aktivnost ugljenika $^{14}_{6}\mathrm{C}$ jednaku 63 raspada u minutu. Uzorak od 1 [g] tek posečenog drveta, pokazuje aktivnost ugljenika $^{14}_{6}\mathrm{C}$ jednaku 15,3 raspada u minutu. Period poluraspada ugljenika $^{14}_{6}\mathrm{C}$ jednak je 5730 godina. Koliko je staro ognjište?
Rešenje:
Dok je drvo živo, količina radioaktivnog ugljenika $^{14}_{6}\mathrm{C}$ se ne menja, zbog stalne razmene ovog elementa sa atmosferom. Sečom drveta, "disanje" drveta prestaje i količina radio-aktivnog ugljenika se dezintegracijom jezgara smanjuje. Proces dezintegracije se odvija po zakonu:

$$N = N_0 e^{-\lambda t},$$

gde je N broj još ne raspadnutih jezgara, N_0 početni broj jezgara (u trenutku t = 0 [s]), a λ je konstanta radioaktivnog raspada. Period poluraspada $\tau_{1/2}$ i konstanta radioaktivnog raspada λ povezani su izrazom:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{\tau_{1/2}} = \frac{0,693}{\tau_{1/2}}.$$

U trenutku t, aktivnost jezgra je a = λN, odakle je N = a/λ. Aktivnost uzorka ugljenisanog drveta je:

$$a = \frac{63}{60} = 1,05 \text{ [Bq]},$$

gde je uvedena jedinica aktivnosti bekerel = jedan raspad u sekundi, (1[Bq] = 1[s^{-1}]). Broj neraspadnutih jezgara je:

$$N = \frac{1,05[\mathrm{s}^{-1}]}{0,693} 5,73 \cdot 3,65 \cdot 2,4 \cdot 3,6 \cdot 10^9 [\mathrm{s}] = 2,74 \cdot 10^{11} \ .$$

Da bi odredili vreme t nakon koga je ostalo $N = 4{\cdot}10^{12}$ jezgara za raspad, potrebno je da se poznaje početni broj radioaktivnih jezgara N_0, tj. broj koji je postojao u trenutku seče drveta. Taj broj može da se odredi iz aktivnosti tek posečenog drveta:

$$a_0 = \lambda N_0 \ .$$

Da bi aktivnost tek posečenog drveta, koja je zadata za masu od 1[g], mogla da se upoređuje sa aktivnosti ugljenisanog uzorka od 5 [g], potrebno je da se uveća pet puta:

$$a_0 = \frac{5 \cdot 15,3}{60} = 1,275 \ [\mathrm{Bq}].$$

Početni broj jezgara je:

$$N = \frac{1,05[\mathrm{s}^{-1}]}{0,693} 5,73 \cdot 3,65 \cdot 2,4 \cdot 3,6 \cdot 10^9 [\mathrm{s}] = 2,74 \cdot 10^{11} .$$

Zakon radioaktivnog raspada može da se napiše kao: $\frac{N}{N_0} = 0,824 = e^{-\lambda t}$,odakle se logaritmovanjem dobija:

$$\ln \frac{N}{N_0} = -\lambda t \text{, ili}$$

$$t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{N}{N_0} .$$

Uvrštavanjem vrednosti N i N_0 i $\lambda = 0,693/\tau_{1/2}$, dobija se da je t = 1600 godina, što je i starost ognjišta.

5.10. U nuklearnoj elektrani se godišnje potroši 19,2 [kg] urana $^{235}_{92}\mathrm{U}$. Znajući da se pri svakom cepanju jezgra $^{235}_{92}\mathrm{U}$ oslobodi energija od 200 [MeV] i da je koeficijent iskorišćenja pri pretvaranju nuklearne u električnu energiju jednak 25 %, odredi snagu elektrane.

Rešenje:

Masa od m = 19,2 [kg] urana $^{235}_{92}\mathrm{U}$ sadrži:

$$N = \frac{m \cdot N_A}{M} = \frac{19,2[\mathrm{kg}] \cdot 6,022 \cdot 10^{23} [\mathrm{mol}]^{-1}}{0,235[\mathrm{kg/mol}]} \approx 5{\cdot}10^{25} \text{ jezgara,}$$

gde je M molarna masa ovog izotopa urana.

Energija koja se dobije raspadom $5{\cdot}10^{25}$ jezgara jednaka je:

$$N{\cdot}E = 5{\cdot}10^{25}{\cdot}200 \ [\mathrm{MeV}] = 10^{28} \ [\mathrm{MeV}] = 1,6{\cdot}10^{15} \ [\mathrm{J}].$$

Snaga je jednaka energiji oslobođenoj u jedinici vremena, pa može da se izračuna na sledeći način:

$$P = \frac{NE}{t} = \frac{1,6 \cdot 10^{15} [\mathrm{J}]}{365 \cdot 24 \cdot 3600 [\mathrm{s}]} = 5,07 \cdot 10^7 \ [\mathrm{W}] \ .$$

Korisna snaga je jednaka P_k = 25% P = 0,25·5,07·10^7 [W] ≈12,7 [MW].

5.3 Pitanja

5.11. Kako zavisi energija elektrona a) od rednog (atomskog) broja jezgra Z i b) glavnog kvantnog broja n, prema Borovom modelu atoma?

5.12. Za jednostruko jonizovani atom helijuma He^+, izračunaj: a) radijus prve orbite elektrona b) energiju jonizacije iz osnovnog stanja i v) energiju elektrona u prvom pobuđenom stanju, (n = 2). Energiju izrazi u elektronvoltima.

5.13. Za dvostruko jonizovani atom litijuma Li^{++}, izračunaj: a) radijus prve orbite elektrona, b) energiju jonizacije iz osnovnog stanja i v) energiju elektrona u prvom pobuđenom stanju, (n = 2). Energiju izrazi u elektronvoltima.

5.14. Atom vodonika emituje spektralnu liniju talasne dužine λ = 102,6 [nm]. Koji je glavni kvantni broj polazne orbite elektrona i koji je glavni kvantni broj orbite na koju elektron prelazi?

5.15. Foton energije E = 15 [eV] jonizuje atom vodonika koji se nalazi u osnovnom stanju. Kolikom će se brzinom elektron udaljiti od jezgra?

5.16. Za koliko se poveća energija atoma koji apsorbuje foton frekvencije $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ [Hz]?

5.17. Koliko mogućih energijskih stanja elektrona ima orbita sa glavnim kvantnim brojem: a) n = 1 b) n = 2 v) n = 3 i g) n = 4?

5.18. Elektronska konfiguracija atoma berilijuma $_4Be$, je $1s^2 2s^2$. Da li je elektronska konfiguracija atoma bora $_5B$, $1s^2 2s^3$? Objasni.

5.19. Napiši elektronsku konfiguraciju argona, $_{18}Ar$.

5.20. Napiši elektronsku konfiguraciju kalijuma, $_{19}K$.

5.21. Koliki je broj neutrona u jezgru izotopa vodonika, tricijuma?

5.22. Koliki je broj neutrona u jezgru izotopa urana $^{235}_{92}U$?

5.23. Odredi energiju veze i energiju veze po nukleonu jezgra kiseonika $^{16}_{8}O$, čija je masa atoma m_a = 15,99491 [u]. Poznate su mase neutrona, protona i elektrona: m_n = 1,00867 [u], m_p = 1,00728 [u], odnosno m_e = 0,00055 [u].

5.24. Za koliko vremena će se raspasti 3/4 od početnog broja jezgara izotopa hroma $^{51}_{24}Cr$, ako je njegov period poluraspada $\tau_{1/2}$ = 27,8 časova?

5.25. Ako se jezgro aluminijuma ${}^{27}_{13}Al$ bombarduje α česticom, oslobodi se neutron. Koje se jezgro dobije tom reakcijom?

5.26. Koji element nastaje izletanjem α čestice iz jezgra izotopa plutonijuma ${}^{239}_{94}Pu$?

5.27. Za koliko se promeni, redni broj elementa u periodnom sistemu Mendeljejeva, usled β^- raspada? Da li se redni broj poveća ili smanji?

5.28. Apsorpcijom jednog neutrona ${}^{1}_{o}n$, jezgro izotopa urana ${}^{235}_{92}U$ deli se na dva jezgra: jezgro ksenona ${}^{140}_{54}Xe$ i jezgro izotopa stroncijuma ${}^{94}_{38}Sr$. Koje se čestice i koliko njih, oslobađaju ovom reakcijom?

5.29. Kakva je fizička priroda gama (γ) zraka? Kolika je brzina prostiranja gama zraka kroz vakuum?

5.30. Ako jezgro nekog elementa emituje γ zrake, da li nastaje jezgro koje odgovara elementu sa novim rednim brojem u periodnim sistemu Mendeljejeva, u odnosu na prvobitni?

5.4 Odgovori

5.11. a) $E \sim Z^2$ b) $E \sim n^{-2}$
5.12. a) $r_1 = 2{,}65 \cdot 10^{-11}$ [m], b) 54,5 [eV], v) 13,6 [eV]
5.13. a) $r_1 = 1{,}77 \cdot 10^{-11}$ [m], b) 122,4 [eV], v) 30,6 [eV]
5.14. $k = 3$, $n = 1$
5.15. $7 \cdot 10^5$ [m/s]
5.16. za $3{,}3 \cdot 10^{-19}$ [J]
5.17. a) 2 b) 8 v) 18 i g) 32
5.18. Nije, jer po Paulijevom principu, energijska stanja dva elektrona ne mogu da budu određena sa sva četiri kvantna broja jednaka. Elektronska konfiguracija $_5B$, je $1s^2 2s^2\ 2p^1$.
5.19. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$
5.20. $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^1$
5.21. 2
5.22. 143
5.23. $\Delta E = 127{,}6$ [MeV], $\Delta E/16 = 7{,}98$ [MeV]
5.24. $t = 2\tau = 55{,}6$ časova
5.25. jezgro fosfora ${}^{30}_{15}P$
5.26. ${}^{235}_{92}U$
5.27. poveća se za 1
5.28. dva neutrona
5.29. to su elektromagnetski talasi; $3 \cdot 10^5$ [km/s]
5.30. ne